Analycité de l'espace

Br-Rachid www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 1:

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit les points $A(1,-2,1)$ et $B(-1,0,5)$ et $C(2,3,4)$ et $D(5,0,-2)$

1. **Former les cordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$**
2. **Existe-t-il un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$?**
3. **Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?**
4. **Déterminer les cordonnées du point E pour que $ABCE$ soit un parallélogramme**
5. **Déterminer les cordonnées de G le barycentre des points $(A,1)$ et $(B,1)$ et $(C,1)$ et $(E,1)$**

Sujet 2:

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soit les points $A(4,0,0)$ et $B(0,5,0)$ et $C(0,0,3)$

1. **Représenter le quadrilatère $OABC$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$**
2. **Déterminer les cordonnées des points I et J et K et L puis les représenter ; avec :**

$$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad 5\overrightarrow{OJ}-4\overrightarrow{OB}=0 \quad \text{et} \quad 4\overrightarrow{AB}=7\overrightarrow{AK} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OL}$$

3. **Montrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes**
4. **Vérifier que l'intersection de (IJ) et de (KL) est le point milieu du segment $[IJ]$**

Sujet 3:

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit le vecteur $\vec{u}(1,-1,2)$.

1. **Former un vecteur $\vec{v}$ qui ne soit pas colinéaire avec $\vec{u}$**
2. **Former un vecteur $\vec{w}$ qui ne soit pas colinéaire ni avec $\vec{u}$ ni avec $\vec{v}$**
3. **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils toujours coplanaires ?**

Sujet 4:

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient $\vec{a}(0,1,1)$ et $\vec{b}(1,1,0)$ et $\vec{c}(1,0,1)$

1. **Soient α et β des nombres réels tels que : $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$. Montrer que α et β sont tous deux nuls et déduire que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires**
2. **Soient α et β et γ des nombres réels tels que : $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$. Montrer que α et β et γ sont tous les trois nuls et déduire que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ne sont pas coplanaires**

Sujet 5:

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soient $\vec{a}(0,1,1)$ et $\vec{b}(1,1,0)$ et $\vec{c}(1,0,1)$ et $\vec{u}(1,-1,1)$

1. **Vérifier que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ne sont pas coplanaires**
2. **Déterminer des nombres réels x et y et z tels que : $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{u}$**

Sujet 6 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soient $A(1,1,1)$ et B$(1,1,2)$ et $C(1,0,1)$ et $D(x,y,3)$

1- **Représenter soigneusement les points A et B et C dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$**

2- **Déterminer les coordonnées de D pour que O et A et D soient alignés**

3- **Montrer que A et B et C forment un plan**

4- **Donner une représentation paramétrique du plan (ABC)**

5- **Déduire une équation cartésienne de (P)**

Sujet 7 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient $A(1,1,1)$ et $\vec{u}(1,1,2)$

1. **Former une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et dirigée par $\vec{u}$**
2. **Déduire deux équations cartésiennes de (D)**
3. **Soit le plan $(P):x+y+z-1=0$**

   a) **Montrer que (D) et (P) ne sont pas parallèles**

   b) **Déterminer le point d'intersection de (D) et (P)**

Sujet 8 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soient $A(1,1,1)$ et $B(\frac{1}{2},1,0)$ et $\vec{u}(1,1,0)$ et $\vec{v}(-2,2,0)$

1- **Donner des représentations paramétriques des droites (D) passant par A et dirigée par $\vec{u}$ et de (L) passant par B et dirigée par $\vec{v}$**

2- **Montrer que (D) et (L) ne sont pas parallèles**

3- **Montrer que (D) et (L) ne sont pas coplanaires**

4- **Former une représentation paramétrique d'un plan (P) dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et ne contenant ni (D) ni (L)**

Sujet 9 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1- **Donner une représentation paramétrique du plan (P) dont une équation cartésienne est :**

$x+y+z+1=0$

2- **Donner une représentation paramétrique de la droite (D) dont deux équations cartésiennes sont :** $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$

3- **Déterminer l'intersection de (D) et (P)**

Sujet 10 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1. **Montrer la proposition suivante : Si** $ax+by=0.\quad \forall a,b \in IR$ **alors** $x=y=0$
2. **Soient a et b deux nombres réels non tout deux nuls. Soit le plan $(P_{(a,b)})$ d'équation cartésienne :**

$$a(x+y-1)+b(x+y+z-1)=0$$

3. **a) Montrer que $(P_{(1,0)})$ et $(P_{(0,1)})$ ne sont pas parallèles**
4. **b) Déterminer $(P_{(1,0)}) \cap (P_{(0,1)})$**
5. **Montrer que tous les plans $(P_{(a,b)})$ passent par une droite fixe à déterminer**

Sujet 11:

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit le point $M(x,y,z)$. On pose $OM=\rho$

Soit H le projeté orthogonal de M sur le plan $P_{(O,\vec{i},\vec{j})}$.

On pose : $r=OH$ **et** $(\vec{i}, \overrightarrow{OH})=\theta[2\pi]$ **et** $(\overrightarrow{OM}, \vec{k})=\varphi[2\pi]$ **et** $h=z$

Partie 1 : Coordonnées cartésiennes

1. **Représenter soigneusement dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le segment $[AB]$ avec $A(1,1,2)$ et $B(2,1,3)$**
2. **Quelles sont les coordonnées cartésienne du projeté orthogonal A' de A sur le plan (YOZ) ?**
3. **Quelles sont les coordonnées cartésiennes du projeté orthogonal B' de B sur la droite (OX) ?**

Partie 2 : Coordonnées cylindriques

1. **Montrer que** $r=OH=\sqrt{x^2+y^2}$ **et que** $\begin{cases} x=r\cos(\theta) \\ y=r\sin(\theta) \end{cases}$ **avec** θ **la mesure de l'angle orienté** $(\vec{i},\widehat{\overrightarrow{OH}})$
   (r,θ,h) **s'appelle le triplet des coordonnées cylindrique de** M**. Ce système est une extension à l'espace du système des coordonnées polaires dans le plan. Lorsque** θ **varit de** 0 **à , Le segment** $[MH]$ **décrit le cylindre de base le cercle** $C_{(O,r)}$ **et de hauteur** $|h|$
2. **Donner les coordonnées cylindriques du points de coordonnées cartésiennes** $B(\sqrt{3},1-2)$
3. **Déterminer les coordonnées cartésiennes du point de coordonnées cylindrique** $C(2,\frac{-\pi}{6},1)$

Partie 3 : Coordonnées sphériques

1. **Montrer que :** $\begin{cases} x=\rho\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y=\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ z=\rho\cos(\varphi) \end{cases}$**.** **avec** φ **la mesure de l'angle orienté** $(\widehat{\overrightarrow{OM},\vec{k}})$
   (ρ,θ,φ) **s'appelle le triplet des coordonnées sphériques de** M**. Lorsque** θ **varie de** 0 **à** 2π **et** φ **varie de** 0 **à** π**, Le Point** M **décrit la sphère de centre** O **et de rayon** ρ
2. **Montrer que :** $x^2+y^2+z^2=\rho^2$
3. **Déterminer les coordonnées sphériques du point** E **de coordonnées cartésiennes** $E(1,1,\sqrt{6})$
4. **Déterminer les coordonnées cartésiennes du point** F **de coordonnées sphériques** $E\left(3,0,\frac{\pi}{6}\right)$

Sujet 12:

Soient $m\in IR$ **et** (P_m) **le plan d'équation cartésienne :** $(m-1)x+(m+2)y+mz-2=0$

1. **Vérifier que** $O(0,0,0)\notin(P_m)$ **;** $\forall m\in IR$
2. **Donner une représentation paramétrique de** (P_0) **et de** (P_1)
3. **Montrer que tous les plans** (P_m) **passent par une droite fixe** (Δ) **à déterminer**
4. **Déterminer** A **et** B **les points d'intersection respectifs de** (P_m) **avec les axes de cordonnées**
5. **Montrer que la droite (AB) passe par un point fixe à déterminer**

Sujet 13:

Soit l'ensemble des points $M(x,y,z)$ **de l'espace tels que :** $x^2+y^2+z^2=1$

1. **Montrer que** x **ou** y **ou** z **est non nul puis montrer que :** $|x|\le 1$ **et** $|y|\le 1$ **et** $|z|\le 1$
2. **Vérifier que :** $\exists\varphi\in IR.$ $\cos^2(\varphi)=x^2+y^2$ **et** $\sin(\varphi)=z$
3. **Vérifier que :** $\exists\theta\in IR.$ $\cos(\varphi)\cos(\theta)=x$ **et** $\cos(\varphi)\sin(\theta)=y$ **et** $\sin(\varphi)=z$