Sujet 1:

Soit $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib. \quad (a,b)\in Z^2\}$

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[i],+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$
2. Montrer que $(\mathbb{Z}[i],+,\times)$ est un anneau unitaire
3. Déterminer les éléments de E admettant un inverse

Sujet 2 :

Dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$, on considère les matrices suivantes

$$O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$$

Première partie

1. Montrer que : $A^2+2A-3I=O$
2. Déduire que A est inversible dans $M_3(\mathbb{R})$ et calculer son inverse A^{-1}
3. Montrer que $(A+3I)\times(A-I)=O$. $A+3I$ est-elle inversible dans $M_3(\mathbb{R})$?

Deuxième partie : On considère l'ensemble $E=\{M\in M_3(IR). \quad AM=MA\}$

1. a) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire
   b) Montrer que si $xA+yI=0$ avec x et y deux nombres réels, alors $x=y=0$
2. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que: $A^n=u_nA+v_nI$
3. a) Montrer que: $\forall n\in\mathbb{N}. \quad u_n+v_n=1$
   b) Déduire u_n et v_n en fonction de n et déterminer A^n

Sujet 3:

Soit p un entier naturel non nul

1- Vérifier que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire

2- On suppose p non premier.

a) Montrer que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ n'est pas intègre

b) Montrer que $x\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est inversible dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ ssi $PGDC(x,p)=1$

c) quelle condition sur p, ($(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ est-il un corps ?

3- On suppose que p est premier avec $p\geq 3$.

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'équation $x^2=1$

b) Montrer que : (p est premier) si et seulement si $((p-1)!\equiv 1[p])$

Br-Rachid -- sc-math.e-monsite.com

Sujet 4:

Pour $a \in IR$, on définit sur IR la fonction : $f_a(x)=ax$

1. Montrer que pour tout $(a,b)\in \mathbb{R}^2$ on a : $f_a+f_b=f_{a+b}$ et $f_a o f_b=f_{ab}$
2. Déterminer b en fonction de a pour qu'on ait : $f_a+f_b=f_0$
3. On prend $a\neq 0$. Déterminer b en fonction de a pour qu'on ait : $f_a o f_b=f_1$
4. Soit $K=\{f_a . \quad a\in IR\}$. Montrer que $(K,+,o)$ est un corps commutatif

Sujet 5:

1. Soit $K=\left\{M_{(x,y)}=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x\end{pmatrix}; x,y\in IR\right\}$. Montrer que $(K,+,\times)$ est un corps commutatif
2. Soit $IQ[i]=\{a+ib;(a,b)\in (IQ)^2\}$. Montrer que $(IQ[i],+,\times)$ est un corps commutatif

Sujet 6:

Soit $(A,+,\times)$ un anneau unitaire commutatif intègre et fini

Soit $a\in A^*$. Soit f l'application de A dans A telle que : $\forall x\in A. \quad f(x)=ax$

- Montrer que f est injective.
- Déduire que f est bijective
- Montrer, en utilisant la surjectivité de f, que a est inversible
- Montrer que $(A,+,\times)$ est un corps

Sujet 7:

Soit $(A,+,\times)$ un anneau unitaire d'unité 1. $x\in A$ est dit idempotent pour $\times$ si $x^2=x$

1- Exemples : Vérifier que :

a) Dans $Z/6Z$, 3 et 4 sont idempotents pour $\times$.

b) Dans $M_2(IR)$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ est idempotente pour $\times$

c) Dans l'ensemble des fonctions de $IR^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x,0)$ est idempotente pour la composition

d) Tout élément $X\in P(E)$ est idempotent pour Δ

2- Dans la suite, $(A,+,\times)$ est un anneau unitaire dont tous les éléments sont idempotents pour le produit

a) Montrer que si x est non nul et différent de 1 alors x est un diviseur de zéro

b) Montrer que $xy+yx=0$ et déduire que $x+x=0$

c) Déduire de ce qui précède que $(A,+,\times)$ est commutatif

d) Montrer que $xy(x+y)=0$ pour tout x et y éléments de A

3- Vérifier que $Z/2Z$ est un anneau de Boole (tous ses éléments sont idempotents)

Br-Rachid --- sc-math.e-monsite.com

Sujet 8:

Soit $(A,+,\times)$ un anneau unitaire d'unité 1. $x\in A$ est dit nilpotent d'indice n si $x^n=0$ et $x^{n-1}\neq 0$

Soient $a\in A$ et $b\in A$ deux éléments nilpotent de A avec $ab=ba$

1. Exemples :

a) Dans $Z/8Z$, montrer que 2 et 4 et 6 sont nilpotents et préciser leurs indices

b) Dans $M_3(IR)$, montrer que la matrice $J=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice 3

2. Montrer que $1-a$ est inversible

3. Montrer que ab et $a+b$ sont nilpotents

Sujet 9:

Soit E un ensemble non vide. On munit $P(E)$ des lois internes Δ et $\cap$

1. Montrer que $(P(E),\Delta)$ est un groupe commutatif

2. Montrer que $(P(E),\Delta,\cap)$ est un anneau commutatif unitaire et non intègre

3. Résoudre dans $(P(E),\Delta,\cap)$ l'équation d'inconnue X : $A\Delta X=B$

Sujet 10 : (Bacc 2017 Norm)

On rappel que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif

On considère l'ensemble $E=\left\{M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}.\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$. Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

1. Montrer que E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}),+)$

2. On définie dans $M_3(\mathbb{R})$ la loi $M_{(a,b)}T\ M_{(c,d)}=M_{(a,b)}\times A\times M_{(c,d)}$

   Vérifier que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}),T)$

3. L'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E associe à $a+ib$ la matrice $M_{(a,b)}$

   a) Vérifier que φ est un morphisme de $(\mathbb{C},\times)$ vers (E,T) tel que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

   b) Déduire que (E^*,T) est un groupe commutatif et préciser son élément neutre J

4. a) Montrer que T est distributive par rapport à $+$ dans E

   b) Déduire que $(E,+,T)$ est un corps commutatif

Br-Rachid --- sc-math.e-monsite.com

Sujet 11 : (Bacc 2016 Ordinaire)

On rappel que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif

On considère l'ensemble $E=\left\{M_{(x,y)}=\begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}. \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

5. Montrer que E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}),+)$
6. Vérifier que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.\ \forall(x',y')\in\mathbb{R}^2.\quad M_{(x,y)}\times M_{(x',y')}=M_{(xx'-yy',xy'+x'y)}$
7. On pose $E^*=E-\{M_{(0,0)}\}$. Soit j l'application de $\mathbb{C}$ vers E qui au nombre complexe $z=x+iy$ associe $M_{(x,y)}$
   a) Montrer que j est un isomorphisme de $(\mathbb{C},\times)$ vers $(E;\times)$
   b) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif d'unité $M(1,0)$
   c) Déterminer l'inverse de tout élément de $E^*=E-\{M_{(0,0)}\}$
8. Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif
9. On pose $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   a) Calculer $A\times M_{(x,y)}$ pour tout $M_{(x,y)}\in E$
   b) En déduire qu'aucun élément de E n'est inversible dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

Sujet 12 : (Bacc 2016 Ratrapage)

On rappel que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif

On considère l'ensemble $E=\left\{M(z)=\begin{pmatrix} x+2y & 0 & 5y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & x-2y \end{pmatrix}. \quad z\in\mathbb{C}\right\}$ ($z=x+iy$)

1. On munit E de la loi $\star$ définie par : $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2.\quad M(z)\star M(z')=M(z)+M(z')-M(0)$

   Montrer que $(E,\star)$ est un groupe commutatif
2. Soit j l'application de $\mathbb{C}$ vers E qui au nombre complexe $z=x+iy$ associe $M_{(z)}$

   Montrer que j est un isomorphisme de $(\mathbb{C},\times)$ vers $(E,\times)$ Déduire la structure de $(E^*,\times)$
3. Déterminer l'inverse de tout élément de $E^*=E-\{M_{(0,0)}\}$
4. Montrer que $(E,\star,\times)$ est un corps commutatif

Br-Rachid --- sc-math.e-monsite.com

Sujet 13:

On rappel que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif.

Pour tout nombre réel x , on pose $M_{(x)}=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -2x & 1+2x\end{pmatrix}$ et soit $E=\{M_{(x)}. \quad x\in\mathbb{R}\}$

On munit E de la loi $\perp$ définie par : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2. \quad M_{(x)}\perp M_{(y)}=M_{(x+y+1)}$

1. Soit j l'application de $\mathbb{R}$ vers E qui au nombre réel x associe $M_{(x-1)}$
   a) Montrer que j est un morphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\perp)$
   b) Montrer que $(E,\perp)$ est un groupe commutatif et préciser son élément neutre
   b) Déterminer le symétrique de $M_{(x)}\in E$ par la loi $\perp$
   c) Calculer en fonction de $n\in\mathbb{N}$ et de x la puissance $(M_{(x)})^n$
2. a) Montrer que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2. \quad M_{(x)}\times M_{(y)}=M_{(x+y+xy)}$
   b) En déduire que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ et que $\times$ est commutatif dans E
   c) Montrer que la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $\perp$ dans E
3. Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}. \quad M_{(x)} \times M_{\left(\frac{-x}{1+x}\right)}=I$
4. Montrer que $(E,\perp,\times)$ est un corps commutatif

Sujet 14 : (Bacc 2014 ordinaire)

On rappel que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif.

soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On pose $M(a,b)=\begin{pmatrix}a & a-b\\ b & a+b\end{pmatrix}$ et $E=\{M_{(a,b)}. \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$
2. Calculer J^2 avec $J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et déduire que E n'est pas stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
3. On définie sur $M_2(\mathbb{R})$ la LCI $\ast$ par : $A\ast B=ANB$ avec $N=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
   soit l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ qui associe à tout $z=a+ib$ la matrice $M(a,b)$
   a) Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),\ast)$
   b) Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ Déduire que $(E^*,\ast)$ est un groupe abélien
4. Montrer que : $\forall(A,B,C)\in E^3. \quad A\ast(B+C)=A\ast B+A\ast C$
5. Déduire de ce qui précède que $(E,+,\ast)$ est un corps commutatif

Br-Rachid --- sc-math.e-monsite.com

Sujet 15 : (Bacc 2010-S.Normale)

Dans $I=\mathbb{R}^{+*}$, on définie la LCI $\ast$ comme suit : $\forall x, y \in I.\quad x \ast y = e^{Lnx.Lny}$

1. Montrer que $\ast$ est commutative et associative dans I
2. Montrer que $\ast$ admet dans I un élément neutre ε à déterminer
3. a) Montrer que $(I-\{1\},\ast)$ est un groupe commutatif

   b) Montrer que $]1,+\infty[$ est un sous groupe de $(I-\{1\},\ast)$
4. Montrer que $(I,\times,\ast)$ est un corps commutatif

Br-Rachid --- sc-math.e-monsite.com