Les applications

Br-Rachid www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 1:

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}. \quad f(x) = x^2 - x + 1$

1. a) Calculer les images de 0 et de 1 et de -1

   b) Déduire l'image directe de l'ensemble $A = \{-1, 0, 1\}$

2. a) Calculer les antécédents de 0 et ceux de 1 et ceux de 3

   b) Déduire l'image réciproque de l'ensemble $A = \{0, 1, 3\}$

3. a) A partir de la forme canonique du trinôme $x^2 - x + 1$, déterminer les coordonnées de Ω , le sommet de la parabole ζ_f

   b) Représenter graphiquement la parabole ζ_f

4. a) En utilisant ζ_f , Déterminer l'image directe de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et celle de $[0, 1]$

   b) En utilisant ζ_f , Déterminer l'image réciproque de $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ et celle de $[-1, 0]$

5. Soit l'application g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}. \quad g(x) = x(\sqrt{x^2} - 1) + 1$

   a) Montrer que f et g ont la même restriction sur $[0, +\infty[$ le graphique

   b) Représenter dans le même repère qu'en 3-b le graphique de g

Sujet 2:

On considère l'application f de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}. \quad f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

1. Déterminer l'image directe de l'ensemble $A = \{-1, 0\}$

2. Déterminer l'image réciproque de l'ensemble $A = \{0, 1, -1\}$

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}. \quad f(x) = 1 + \dfrac{2}{x-1}$ et déduire les asymptotes de ζ_f de f

   c) Représenter graphiquement l'hyperbole ζ_f

4. a) En utilisant ζ_f , Déterminer l'image directe de $[0, 1[$ et celle de $]1, +\infty[$

   b) En utilisant ζ_f , Déterminer l'image réciproque de $[2, +\infty[$

5. Soit l'application g de $]1, +\infty[$ vers te $]1, +\infty[$ telle que : $\forall x \in]1, +\infty[. \quad g(x) = f(x)$

   a) Montrer que : $\forall y \in]1, +\infty[. \quad \exists ! x \in]1, +\infty[. \quad g(x) = y$

   b) Déduire que g est bijective de $]1, +\infty[$ vers te $]1, +\infty[$ et définir sa réciproque g^{-1}

   c) Calculer $gog(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$

Sujet 3:

Soit E un ensemble non vide et A une partie non vide de E telle que $A \neq E$

Soit $f : P(E) \to P(E)$ l'application définie par $f(X) = A \cup X$ pour tout $X \in P(E)$

1. Calculer $f(\emptyset)$ et $f(A)$ et $f(\overline{A})$ et $f(E)$
2. Montrer que l'équation $\emptyset$ n'a pas d'antécédent par f dans $P(E)$
3. Montrer que f n'est pas injective
4. Montrer que $fof = f$
5. Soit g l'application de $P(E)$ vers $P(E)$ telle que : $\forall X \subset E.\quad g(X) = A \cap X$

   Etudier les propriétés de l'application g

Sujet 4:

Soit A une partie d'un ensemble non vide E. On définie de E vers $\{0,1\}$ l'application $\begin{cases} f_A(x) = 1 \; si \; x \in A \\ f_A(x) = 0 \; si \; x \notin A \end{cases}$

1. Calculer $f_E(x)$ et $f_\emptyset(x)$ pour tout $x \in E$
2. Montrer que si $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ alors f_A est surjectif
3. Montrer que : $A = B \Longleftrightarrow f_A = f_B$
4. Soit A et B deux parties d'un ensemble non vide E.

   a) Montrer que $f_{A \cap B} = f_A \times f_B$ et que $f_{\bar{A}} = 1 - f_A$

   b) Montrer que $f_{A \setminus B} = f_A - f_A f_B$ et que $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A f_B$

Sujet 5:

Soient $f : E \to F$ une application. Soient $(A, A') \in (\mathrm{P}(E))^2$ et $(B, B') \in (\mathrm{P}(E))^2$

1. Montrer que $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ et que $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
2. a) Montrer que $A C f^{-1}(f(A))$

   b) Montrer que si f injective alors $A = f^{-1}(f(A))$
3. a) Montrer que $f(f^{-1})(B) C B$

   b) Montrer que si f est surjective alors $f(f^{-1})(B) = B$
4. a) Montrer que $f(A \cap A')\ C f(A) \cap f(A')$

   b) Montrer que $f(A \cap A')\ C f(A) \cap f(A')$ si et seulement si f est injective

Sujet 6:

Soit E un ensemble non vide et soit $x \in E$. On considère les ensembles :

$$\Gamma = \{X \in P(E) \ / \ x \in X\} \quad \text{et} \quad \mathrm{T} = \{X \in P(E) \ / \ x \notin X\}$$

1- Vérifier que : $P(E) = \Gamma \cup \mathrm{T}$ et $\Gamma \cap \mathrm{T} = \varnothing$

2- Soit l'application h définie de Γ vers T par $h(X) = X - \{x\}$ Montrer que h est bijective et définir sa réciproque

3- En utilisant les questions 1- et 2- , montrer par récurrence que :

$$cardE = n \quad \Rightarrow \quad cardP(E) = 2^n$$

Sujet 7:

Soit E un ensemble non vide et $P(E)$ l'ensemble de ses parties et A une partie de

1. a) Montrer que $\forall X \in P(E).\ A \backslash (A \Delta X) = X \cap A$ et $(A \Delta X) \backslash A = X \cap \bar{A}$ (Schéma de Van)

   b) Déduire que $\forall X \in P(E).\quad A \Delta (A \Delta X) = X$

2. Soit $f : P(E) \rightarrow P(E)$ l'application définie par $f(X) = A \Delta X$ pour tout $X \in P(E)$

   a) Calculer $f(\varnothing)$ et $f(A)$ et $f(\bar{A})$ et $f(E)$

   b) Montrer que f est injective et est surjective

   d) Déduire que f est bijective et déterminer sa réciproque f^{-1}

3. Montrer que $fof(X) = f(X) \quad (C \in P(E))$

Sujet 8:

Soit A une partie non vide d'un ensemble non vide E. Soit Z l'ensemble $Z = \{X \in P(E) \ / \ A\, C\, X\}$

L'application $\varphi : P(E) \rightarrow P(A) \times Z$ est telle que $\varphi(X) = (A \cap X, A \cup X)$ pour tout $X \in P(E)$

1. Montrer que :

   a) $A \cup X = A \cup Y \Rightarrow \bar{A} \cap X = \bar{A} \cap Y$ pour tout $(A, X, Y) \in (P(E))^3$

   b) $A \cap X = A \cap Y \Rightarrow \bar{A} \cup X = \bar{A} \cup Y$ pour tout $(A, X, Y) \in (P(E))^3$

2. Montrer que : [$(A \cap X = A \cap Y)$ et $(A \cup X = A \cup Y)$] $\Rightarrow$ $(X = Y)$

3. A et B et C sont trois partie de E telles que $B\, C\, A\, C\, C$.

   Montrer que $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases} \Rightarrow X = (C \backslash A) \cup B$

4. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque

Sujet 9:

On considère l'application E , partie entière, définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z}$.

1. Calculer $E(\sqrt{2})$ et $E\left(\frac{-1}{2}\right)$. E est-elle injective ?
2. Montrer, par contre que E est surjective
3. Déterminer l'image directe de $\mathbb{Z}$ et celle de $[0,1[$ et celle de $[-1,5[$
4. Déterminer l'image réciproque de $\{-2\}$ et celle de $\{-1,2\}$ et celle de $\mathbb{N}$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(x^2)=x$

Sujet 10:

Soit l'application $f:\mathbb{Z}\times[0,1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall(p,d)\in\mathbb{Z}\times[0,1[.\quad f(p,d)=p+d$

1. Vérifier que : $\forall(d_1,d_2)\in[0,1[.\quad -1<d_1-d_2<1$
2. Montrer que

   $\forall(p_1,d_1)\in\mathbb{Z}\times[0,1[.\ \forall(p_2,d_2)\in\mathbb{Z}\times[0,1[.\quad p_1+d_1=p_2+d_2 \Rightarrow (p_2,d_1)=(p_2,d_2)$

   Déduire que f est une application injective
3. Montrer que f est bijective et définir sa réciproque (Penser à utiliser la partie entière)

Sujet 11:

Soit l'application $f:\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ définie par : $\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2.\quad f(p,q)=2^p(2q+1)$

1. Etudier la parité des entiers naturels premiers
2. a) Montrer , par l'absurde et en utilisant un argument de « parité » d'un entier, que :

   si $2^{p_1}(2q_1+1)=2^{p_2}(2q_2+1)$ alors $p_1=p_2$

   b) Déduire que f est une application injective
3. En considérant la décomposition en produit de facteurs premier d'un entier naturel, montrer que f est surjective et déduire qu'elle est bijective

Sujet 12:

Soit f l'application de IR^2 dans IR^2 définie par $f(x,y)=(x+y,xy)$

1. Montrer que : $\forall(x,y)\in IR^2.\quad f(x,y)=f(y,x)$. f est-elle une application injective ?
2. Résoudre dans IR^2 le système : $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=1 \end{cases}$. f est-elle une application surjective ?

Sujet 13:

1. Montrer que : $\forall x \in IR. \quad -1 < \dfrac{x}{1+|x|} < 1$
2. Soit l'application f définie de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ par : $\forall x \in IR. \quad f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$
   a) Montrer que l'application f est injective
   b) Montrer que l'application f est surjective. Déduire l'image directe de $\mathbb{R}$ par f
3. Soit l'application g définie de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in]-1,1[. \quad g(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$
   Calculer $gof(x)$ et $fog(x)$
4. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ et déterminer sa réciproque

Sujet 14:

Soit f l'application définie de IR^* vers $\mathbb{R}$ par : $\forall x \neq 0. \quad f(x) = \dfrac{x-2}{|x|}$

1. Montrer que : $\forall x \in]0,1[. \quad f(x) = f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$. f est-elle une application injective ?
2. Montrer que $\forall x \neq 0. \quad f(x) < 1$. Déduire que f n'est pas surjective
3. Montrer que : $f(IR^*) =]-\infty,1[$

Sujet 15:

Soit f l'application définie de $IR^* \times IR^*$ vers $[4,+\infty[$ par : $f(x,y) = (x+y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$

1. Calculer $f\left(\dfrac{1}{x}, x\right)$ et $f\left(x, \dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x > 0$
2. Montrer que f n'est pas injective
3. Montrer que f est surjective

Sujet 16:

Soit l'application $\boldsymbol{f : [-1,+\infty[\rightarrow [1,+\infty[}$ telle que $\boldsymbol{f(x) = x + 2\sqrt{x+1} + 2}$; $\boldsymbol{x \geq -1}$

1. Vérifier que : $\boldsymbol{\forall x \geq -1. \quad f(x) = (1+\sqrt{x+1})^2}$
2. Déterminer l'image réciproque de $\boldsymbol{B = \{1,2\}}$
3. Montrer que : $\boldsymbol{\forall (a,b) \in [-1,+\infty[^2. \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)}$. Déduire les variations de $\boldsymbol{f}$
4. Montrer que $\boldsymbol{f}$ est bijective et définir sa réciproque $\boldsymbol{f^{-1}}$
5. Déterminer deux applications $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{g}$ telles que $\boldsymbol{f = goh}$

Les applications

Br-Rachid www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 17:

Soient les applications définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $u(x)=x^2-x$ et $f(x)=x^4-2x^3+x$

1. Calculer $u(0)$ et $u(1)$ et déduire que f n'est pas injective
2. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}.\quad u(x)\geq\frac{-1}{4}$ et déduire que f n'est pas surjective
3. a) Montrer que : $\forall x\in IR.\quad f(x)=(x^2-x)^2-(x^2-x)$
4. b) Ecrire f sous forme d'un composé de deux applications à déterminer

Sujet 18:

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}.\quad fof(x)=4x-9$

1. Calculer $f(3)$
2. Montrer que f est injective et est surjective
3. Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de f(x)

Sujet 19:

Soient $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$ telle que $f(1)=4$ et $f(n+1)=\frac{1}{2}f(n)+\frac{3}{2}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ et $g(n)=f(n)-3$

1. Calculer $f(2)$ et $g(1)$
2. a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*.\quad g(n+1)=\frac{1}{2}g(n)$

   b) Déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*.\quad g(n+1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ puis déduire $f(n)$ en fonction de n
3. Montrer que f est injective mais pas surjective

Sujet 20:

1. Soit a un nombre réel tel que $|a|<1$. Montrer que : $\forall x\in]-1,1[.\quad \left|\frac{a+x}{1+ax}\right|<1$
2. On considère l'application φ_a de $]-1;1[$ vers $]-1;1[$ donnée par $\varphi_a(x)=\frac{a+x}{1+ax}$

   a) Déterminer $\varphi_a o\varphi_{-a}$ et $\varphi_{-a}o\varphi_a$

   b) Montrer que φ_a est bijective et déterminer sa réciproque