Chapitre : Arithmétique

Br-Rachid http://www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 1 :

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\ \forall a\in\mathbb{Z}\quad a$ divise $(a+1)^{n+1}-1$
2. Montrer que si $n\in\mathbb{Z}$ est impaire, alors n^2-1 est divisible par 8

Sujet 2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation: $x-1/x+3$
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation: $x+2/x^2+2$
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$

Sujet 3 :

1. a) Etudier et représenter la fonction $f:\ \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ telle que : $f(x)=\frac{7x-8}{x^2+x+7}$

   b) Déduire que l'équation $(x^2+x+7)/(x^3+x^2+8)$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$
2. Déterminer les entiers relatifs qui vérifient $\begin{cases}3x+1|16x^2-x+1\\3x+1|12x^2+x-1\end{cases}$

Sujet 4 :

Soit $n\in\mathbb{Z}$. On pose $f(n)=n^2+n+1$ et $g(n)=n^2-n+1$

1. a) Montrer que $f(n)$ et n d'une part et $f(n)$ et $n+1$ d'autre part, sont premiers entre eux

   b) Même question pour $g(n)$ et n d'une part et $g(n)$ et $n+1$
2. a) Montrer que $f(n)$ et $g(n)$ sont impairs pour tout $n\in\mathbb{Z}$

   a) Montrer que si δ est un diviseur commun de $f(n)$ et $g(n)$ alors ! $\delta\in\{-2,-1,1,2\}$

   b) Déduire de 1. que $D_{f(n)}\cap D_{g(n)}=\{-1,1\}$ et que $f(n)$ et $g(n)$ sont premier entre eux

Sujet 5 :

Soient $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{N}^*$. On suppose que q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, le quotient de la division euclidienne de ab^n-1 par b^{n+1} est encore q

Sujet 6 : Sous groupe de $\mathbb{Z}$

1. Soit $m\in\mathbb{Z}$. Soit $M_m=\{km.\quad k\in\mathbb{Z}\}$ l'ensemble des multiples de m dans $\mathbb{Z}$

   Montrer que M_m est un sous groupe de $(\mathbb{Z},+)$
2. Réciproquement, soit H un sous groupe de $(\mathbb{Z},+)$ non trivial (différent de $\{0\}$ et de $\mathbb{Z}$)

   a) Montrer que $\mathbb{N}^*\cap\mathrm{H}\neq\emptyset$. Dans la suite a désigne le plus petit entier positif de H

   b) Montrer que : $\forall k\in\mathbb{Z}.\quad ka\in\mathrm{H}$ ($M_a\subset\mathrm{H}$)

   c) Soit $h\in\mathrm{H}$. En effectuant la division euclidienne de h par a , montrer que $h\in M_a$

d) Quels sont les sous groupes de $\mathbb{Z}$?

Sujet 7 :

1. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}. \quad 24n^2 + 8n \equiv 0[16]$

   b) Déduire que : $\forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2n+1)^4 \equiv 1[16]$

2. Montrer que $\forall a \in \mathbb{Z}. \quad a^4 \equiv 0[16]$ ou $\forall a \in \mathbb{Z}. \quad a^4 \equiv 1[16]$

Sujet 8 :

1. Déterminer le reste de la division Euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 5
2. Déterminer le reste de la division Euclidienne de 8795468×10^{15} par 3
3. Quel est le reste de la division euclidienne de $12344321 + 43211234$ par 7 ?
4. Montrer que 15^2 divise $16^n - 1 - 15n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
5. Montrer que 9 divise $4^n - 1 - 3n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Sujet 9 :

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 13x + 5y = 3$

1. a) Montrer que $x \equiv 1[5]$ et que $y \equiv -2[13]$

   b) Donner une solution (x_0, y_0) de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$

2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}. \quad (x_0 - 5k, y_0 + 13k)$ est aussi solution de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$
3. Montrer que tout diviseur commun de $x_0 - 5k$ et de $y_0 + 13k$ figure dans $d \in \{-3, -1, 1, 3\}$

Sujet 10 :

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}. \quad 3^{2^n} \equiv 3[6]$
2. a) Ecrire le nombre 457 sous la forme $\sum_{k=0}^{m} a_k 2^k$ avec $0 \leq a_k < 1$ et $m \in \mathbb{N}$

   b) Déduire le reste de la division euclidienne de 15^{457} par 6

Sujet 11 :

Soit $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}. \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

1. On pose $u_{n+1} - u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et calculer v_n en fonction de n
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}. \quad u_n \wedge u_{n+1} = 1$

Sujet 12 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble $\zeta_n(0) = \{x \in \mathbb{Z}. \quad x \equiv 0 \ [n]\}$

1. Ecrire $\zeta_n(0)$ en extension (Donner la forme des éléments de $\zeta_n(0)$)
2. Montrer que $\zeta_n(0)$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$
3. a) Montrer que $\zeta_n(0)$ est stable dans $(\mathbb{Z}, \times)$

b) Montrer que $(\zeta_n(0),+,\times)$ est un anneau commutatif intègre

---

Sujet 13 :

1. Montrer que $n^7 \equiv n[7]$
2. Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquelles $n^3-3n+5 \equiv 0[7]$
   Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'équation $x^2-\overline{9}x+\overline{11} \equiv -\overline{8}$

Sujet 14 :

1. Dresser les tables de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\times)$ et de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z},\times)$
2. Montrer que $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*,\times)$ est un groupe
3. $((\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^*,\times)$ est-il aussi un groupe ? Justifier.

Sujet 15 :

On rappel que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\zeta_n(k)=\overline{k}$ avec $0 \leq k \leq n-1$ la classe d'équivalence de k modulo n et on considère l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{\zeta_n(k)=\overline{k}.\quad 0 \leq k \leq n-1\}$

On définit l'application s de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $s(x)=\zeta_n(x)=\overline{x}$

1. a) Montrer que : $\forall 0 \leq k_1 \neq k_2 \leq n-1.\quad \overline{k_1} \cap \overline{k_2} = \emptyset$ (Classes deux à deux disjointes)

   b) Montrer que : $\overline{k_1} \cup \overline{k_2} \cup \overline{k_3} \cup .... \cup \overline{k_{n-1}} = \mathbb{Z}$

2. a) Montrer que s est une application surjective

   b) Montrer que s est un morphisme de $(\mathbb{Z},+)$ (respectivement $(\mathbb{Z},\times)$) vers $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ (respectivement $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\times)$)

   c) Montrer alors que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire et qui est ,suivant n , non intègre

3. On définit l'application φ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vers l'ensemble des racines n[ieme] complexes de l'unité $\Gamma=\{e^{\frac{i2k\pi}{n}}.\quad 0 \leq k \leq n-1\}$ par $\varphi(\overline{k})=e^{\frac{i2k\pi}{n}}$

   Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ vers Γ

Sujet 1 :

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de $15!$
2. Calculer le nombre de diviseurs de $15!$
3. a) Calculer le nombre de diviseurs impairs de $15!$

   b) Calculer le nombre de diviseurs pairs de $15!$

   c) Calculer le nombre de diviseurs non premiers de $15!$

Sujet 2 :

Soient a et b deux entiers supérieurs ou égaux à 1

1. Montrer que $2^{ab}-1\equiv 0[2^a-1]$
2. Soit $p\in\mathbb{N}$. Montrer que si 2^p-1 est premier alors p est premier

Sujet 3 :

1. Soit p un entier premier supérieur strictement à 2
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2\equiv\overline{1}$
3. a) Montrer le théorème de WILSON : si p premier alors $(p-1)!+1$ est divisible par p

   b) Etablir la réciproque

Sujet 4 :

Soit l'application f de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2.\quad f(n,p)=(2p+1)2^n$

1. Déterminer les antécédents de 1 et de 4 et de 12
2. Montrer que f est injective
3. En utilisant la décomposition en facteur premier d'un entier, montrer que f est surjective

---

Sujet 5 :

1. Montrer que $a\wedge b = a\wedge(a+b)$ et $a\wedge b = a\wedge(a-b)$
2. Application : Déterminer suivant les valeurs de n le PGDC $(2n+1)\wedge(n+2)$

Sujet 6 :

Soit la suite $u_0=0$ et $u_1=1$ et $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et est positive
2. Montrer par une « récurrence double », que : $\forall n\in\mathbb{N}^*.\quad u_n\in\mathbb{N}$ *et* $u_n\equiv 1[2]$
3. a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_{n+1}=2u_n+1$

   b) Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_n\wedge u_{n+1}=1$
4. On pose : $u_{n+1}-u_n=v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   a) Montrer que (v_n) est géométrique et calculer v_n en fonction de n

   b) Retrouver le résultat de la question 2,b) : $u_n\wedge u_{n+1}=1$

Sujet 7 :

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} a\wedge b=6 \\ a\vee b=72 \end{cases}$
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} a\wedge b=3 \\ a+b=21 \end{cases}$

Sujet 8 :

a et b sont deux entiers relatifs tels que : $2(a\vee b)+7(a\wedge b)=11$. On pose $d=a\wedge b$

1. Montrer que $d=1$ ou $d=11$
2. Calculer a et b

Sujet 9 :

1. Montrer que si x et y sont deux entiers relatifs premiers entre eux, alors $x+y$ et xy le sont aussi
2. Montrer que : $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2.\quad (x+y)\wedge(x\vee y)=x\wedge y$
3. On considère dans $(\mathbb{N}^*)^2$ le système : $\begin{cases} a\vee b=72 \\ a+b=60 \end{cases}$
   a) Calculer $d=a\wedge b$
   b) Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ le système : $\begin{cases} a\vee b=72 \\ a+b=60 \end{cases}$

Sujet 10 :

1. Soit dans $\mathbb{Z}^2$ le système : $Z^2 : \begin{cases} \alpha^2+\beta^2=13 \\ \alpha\beta=6 \end{cases} \quad (F)$
   a) Montrer que : $\alpha\wedge\beta=1$
   b) Résoudre (F) dans $\mathbb{Z}^2$
2. Montrer que pour tout deux nombres entiers a et b :
   a) $(a\wedge b=1)\Rightarrow(a^2+b^2)\wedge ab=1$
   b) $(a^2+b^2)\wedge ab=(a\wedge b)^2$
3. Soit dans $\mathbb{Z}^2$ le système $\begin{cases} x^2+y^2=1300 \\ (x\wedge y)(x\vee y)=600 \end{cases} \quad (E)$. On pose $d=x\wedge y$
   a) Montrer que $d=10$
   b) Résoudre (E)

Sujet 11 :

1. Calculer $60^n\wedge 18^n\wedge 30^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
2. Etablir que :
   a) $\forall(a,b)\in\mathbb{N}^{2.}\quad a^n\wedge b^n=(a\wedge b)^n$
   b) $\forall(a,b)\in\mathbb{N}^2.\quad a^n\vee b^n=(a\vee b)^n$
   c) $\forall(a,b)\in\mathbb{N}^2.\quad a^n\wedge(ab)^n\wedge b^n=(a\wedge b)^n$
   d) $\forall(a_1,\dots,\dots,\dots,a_m)\in\mathbb{N}^m.\quad a_1^n\wedge a_2^n\wedge\dots\dots\wedge a_m^n=(a_1\wedge a_2\wedge\dots\dots\wedge a_m)^n$
3. Soient $x\in\mathbb{Q}^*$ et $n\in\mathbb{N}$. Montrer que : $x^n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

Sujet 12 :

Résoudre le système dans $\mathbb{N}^2$: $\begin{cases} PGDC(m,n)=m-n \\ PPMC(m,n)=300 \\ 0\le n\le m \end{cases}$

Sujet 13 :

Soit n un entier naturel non nul.

On pose : $x_n=\frac{n(n+1)}{2}$ et $y_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $z_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

1. Montrer que x_n et y_n et z_n sont des entiers naturel
2. On pose $d_n=(2n+1)\wedge 3$
   a) Calculer d_n en fonction de n (On discutera suivant la congruence modulo 3)
   b) Déduire $x_n\wedge y_n$ en fonction de n
3. On pose $q_n=n\wedge(n+2)$
   a) Calculer q_n en fonction de n (On discutera suivant la parité de n)
   b) Déduire $z_n\wedge z_{n+1}$ en fonction de n
4. Montrer que : $\forall n\geq 2.$ $z_n\wedge z_{n+1}\wedge z_{n+2}=1$

Sujet 1 :

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $x \equiv 1[n]$ alors x et n sont premiers entre eux
2. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}.\quad 3^{2^n}+2 \equiv -1[6]$

   b) En déduire que $(3^{2^n}+2) \wedge 6 = 1$
3. Par la relation de congruence, déterminer un couple (x, y) d'entiers relatifs qui vérifie $113x+97y=1$

Sujet 2 :

On rappel que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1. On prend n non premier.

   a) Montrer que l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas intègre

   b) Résoudre $x^2 - \bar{2}x + \bar{3} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
2. On prend n premier.

   a) Montrer, par le théorème de Bézout, que : $\forall 1 \leqslant a \leqslant n-1$. il existe $\forall 1 \leqslant b \leqslant n-1$ tels que $\bar{a}\bar{b} = \bar{1}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

   b) Résoudre $x^2 = \bar{1}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
3. On prend $n = 31$

   a) Vérifier que $1 \equiv -30[31]$ et $15^2 \equiv 8[31]$

   b) Résoudre $x^2 + x + \bar{8} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$

Sujet 3 :

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $\begin{cases} x \equiv 1[11] \\ x \equiv 1[13] \end{cases}$
2. a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $13x - 11y = -1$

   b) En déduire dans $\mathbb{Z}$ les solutions du système : $\begin{cases} x \equiv 1[11] \\ x \equiv 2[13] \end{cases}$
3. a) Montrer que l'équation $14x - 12y = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $\begin{cases} x \equiv 1[12] \\ x \equiv 2[14] \end{cases}$

Sujet 4 :

Soit dans $Z^2 : 3x - 5y = 13\,(E)$

1- Montrer que : $x \equiv 1[5]$ et déduire une solution particulière de (E)

2- Ecrire la solution générale de (E)

3- Montrer que $x \wedge y = 1$ ou $x \wedge y = 13$

4- Déterminer les solutions (x, y) de (E) telles que $\dfrac{x}{y} \in Z$

5- Montrer que : $\forall k \in Z\ (5k+1) \wedge (3k-2) = (k-5) \wedge 13$

6- Résoudre dans Z^2: $\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ x \wedge y = 13 \end{cases}$

Sujet 5 :

1. Soient p et q deux entiers. Montrer que si $p+q\equiv 0[2]$ alors p et q sont de même parité
2. Résoudre de différentes méthodes l'équation : $4m-9n=432$
3. Soit $(E): 4x^2-9y^2=432\ (x,y)\in Z^2$. Soit S son ensemble de solutions
4. Montrer que : $(x,y)\in S \Rightarrow x\equiv 0[3]$ et $(x,y)\in S \Rightarrow y\equiv 0[2]$
5. Montrer alors que : $(E)\Longleftrightarrow X^2-Y^2=12$ puis déterminer S

Sujet 6 :

On considère dans $\mathbb{N}^3$ l'équation : $6x+10y+15z=31$ (E)

1. Montrer que $x\equiv 1[5]$ et $y\equiv 1[3]$ et $z\equiv 1[2]$
2. Par un changement de variable adéquat, déduire que (E) est équivalent à $X+Y+Z=0$
3. Donner les solutions de (E) dans $\mathbb{N}^3$

Sujet 7 :

Soit p un entier naturel premier différent de 2

1. Montrer que p et 4 sont premiers entre eux
2. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturel m tels que $4^m\equiv 1[p]$ (1)
3. Soit q le plus petit entier naturel non nul qui vérifie la relation (1). Soit n un entier naturel qui vérifie (1) et r le reste de la division euclidienne de n par q
   a) Montrer que $4^r\equiv 1[p]$
   b) Déduire que $r=0$
4. Déterminer le plus petit entier naturel q tel que $4^q\equiv 1[29]$

Sujet 8 :

1. Montrer que $n^7\equiv n[42]$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$
2. Montrer que $n^6-n^2\equiv 0[60]$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$

Sujet 9 :

Soit p un entier naturel premier et supérieur strictement à 2

1. Montrer que $n^p\equiv n[2]$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$
2. En utilisant le petit théorème de Fermat, montrer que $(n+1)^p-n^p-1\equiv 0[2p]$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$

Sujet 10 :

Soit p un entier naturel premier. Soit n un entier naturel premier avec p

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 \equiv 1[p]$ (Racine carrée de l'unité)
2. Montrer que si p est impair, alors $n^{\frac{(p-1)}{2}} \equiv 1[p]$ ou $n^{\frac{(p-1)}{2}} \equiv -1[p]$
3. Montrer que $n^{p(p-1)} \equiv 1[p^2]$ (On pourra utiliser l'identité remarquable de Bernoulli)

Sujet 11 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 + z + 1 = 0$ (E)

1. a) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E) alors son conjugué l'est aussi

   b) Déduire que parmi les trois solutions de (E), un est réelle. On note α cette solution
2. Montrer que les deux autres solutions ne sont pas réelles
3. Montrer que $\alpha \notin \mathbb{R}$
4. Montrer que α n'est pas un nombre rationnel

Sujet 12 :

Soit x un entier relatif différent de 1 . On pose: $S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n-1} x^k$ pour tout n entier naturel non nul

1. a) Calculer $S_{100}(-1)$ et $S_8(2)$

   b) Donner une expression de $S_n(x)$ en fonction de x sous forme d'une fraction rationnelle
2. Montrer que : $x^n \wedge (1-x) = 1$
3. a) Montrer que, pour tout n entier naturel non, l'équation $3^n x - 2y = 1$ Admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

   b) Donner son ensemble des solutions

Sujet 1 :

Effectuer chacune des additions suivantes de deux façons différentes : l'une en passant par la base dix et l'autre en posant l'addition et en calculant directement dans la base précisée.

1. $(101101)_2+(111)_2$
2. $(2054)_7+(156)_7$

Sujet 2 :

1. Vérifier que $\overline{101}_{(2)}\equiv 1[2]$
2. Soit p un entier naturel premier. On pose $n=\overline{100.....01}_{(2)}$ ($p-1$ fois zéro)
   a) Ecrire n avec seulement les puissances de 2
   b) Calculer p pour que $n\equiv 0[p]$

Sujet 3 :

Soient $x=\overline{111}^a$ et $y=\overline{114}^a$ et $z=\overline{13054}^a$ avec $a\in\mathbb{N}^*$ et $a>5$

1. Ecrire en base a les nombres $x+y$ et $x+z$ (Discuter les cas possibles suivant les valeurs de a)
2. Calculer a sachant que $z=xy$

Sujet 4 :

Soient a et b et c tels que $\overline{abc}^{12}=\overline{abc0}^5$

1- a) Montrer que a et b et c sont solution de l'équation $19x-13y=4z\,(E)$ d'inconnues dans $\mathbb{Z}^3$
   b) Vérifier que (E) admet une infinité de solutions dans $\mathbb{Z}^3$. En donner une caractérisation géométrique
   c) Montrer que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

2- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $19x-13y=1$ et déduire l'expression de la solution générale de (E)

3- Montrer que a et b et c sont de la forme $a=-8c+13k$ et $b=-12c+19k$ avec $k=1$ ou $k=2$

4- Calculer a et b et c

Sujet 5 :

A- Préliminaires :

1- Soient a et b et c trois entiers relatifs avec $a\wedge b=1$. Montrer que : $ac\wedge b=b\wedge c$

2- Montrer que : $\forall m\in\mathbb{Z}.\quad m(2m+1)\wedge(m+1)=1$

3- Déterminer $(m+1)(2m+1)\wedge(2m+3)$ pour tout m entier relatif

B- Soient n un entier naturel non nul. On pose : $a_n=\overline{2310}_n$ et $b_n=\overline{252}_n$ et $d_n=a_n\wedge b_n$

1. a) Montrer que $2n+1$ est un diviseur commun à a et b
   b) Déterminer, suivant la parité de n le plus grand diviseur commun de n^2+n et $n+2$
   c) Déduire que $d_n=2n+1$ ou $d_n=2(2n+1)$
2. a) Ecrire la décomposition en facteurs premiers de a_6 et de b_6
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $a_6x+b_6y=-26$
   c) Montrer que toute solution de cette équation est formée de deux entiers premiers entre eux

Sujet 6 :

Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(x+1)^2=9+5y$ (E) dont (x,y) est une solution

1. a) Montrer que $x\equiv 2[5]$ ou $x\equiv 1[5]$

   b) Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$

2. Montrer que : $\forall k\in\mathbb{Z}.\quad (5k^2+4k-1)\wedge(5k+1)=(k-3)\wedge 8$

3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système : $\overline{121}_{(x)}=\overline{59}_{(y)}$ et $x\wedge y=8$ et $x\equiv 1[5]$

Sujet : Bacc Maroc 2010

I. Déterminer les entiers positifs m qui vérifient et $m^2+\bar{1}\equiv\bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

II. Soit p un entier naturel premier tel que $p=4k+3$ et soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n^2+\bar{1}\equiv\bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

   a- Vérifier que : $(n^2)^{(1+2k)}\equiv -1[p]$

   b- Montrer que p et n sont premiers entre eux

   c- Déduire que : $(n^2)^{(1+2k)}\equiv 1[p]$

III. Montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel n qui vérifie $n^2+\bar{1}\equiv\bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Sujet 7 : Bacc Maroc 2011 (Vendredi)

Soit N le nombre entier qui s'écrit dans le système à base 10 : $N=\underbrace{111\ldots\ldots111\ldots\ldots111}_{2010\,fois}$

1- Montrer que N est divisible par 11

2- Vérifier que 2011 est premier et montrer que $9N=10^{2010}-1$

3- Montrer que 2011 divise N

4- Montrer que : $N\equiv 0[22121]$

Sujet 8: Bacc Maroc 2012

1- a- Montrer que 503 est premier

   b- Montrer que $7^{502}\equiv 1[503]$ et déduire que $7^{2008}\equiv 1[503]$

2- Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $49x-6y=1(E)$

   Sachant que $(1,8)$ est solution de (E), Ecrire la solution de (E) (Faire apparaitre la méthode)

3- On pose : $N=1+7+7^2+\ldots+7^{2007}$

1- Montrer que $(7^{2006},N)$ est solution de (E)

2- Montrer que N est divisible par 4 et par 503

3- Déduire que N est divisible par 2012

Sujet 9: (Bacc 2017 Norm)

On admet que 2017 est premier et que $2016=2^5 3^2 7$

Soit p un nombre premier supérieur ou égale à 5

1. Le couple (x,y) de $(\mathbb{N}^*)^2$ est tel que : $px+y^{p-1}=2017$
   a) Vérifier que $p<2017$
   b) Montrer que p ne divise pas y
   c) Montrer que $y^{p-1}\equiv 1[p]$ puis déduire que p divise 2016
   d) Montrer que $p=7$
2. Déterminer les couples (x,y) de $(\mathbb{N}^*)^2$ qui vérifient $px+y^{p-1}=2017$

Sujet 10: (Bacc Norm 2016)

Première partie

Soit $(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que le nombre premier 173 divise a^3+b^3

1. En observant que $171=3\times 57$, montrer que : $a^{171}\equiv -b^{171}[173]$
2. Montrer que “ 173 divise a ” si et seulement si “ 173 divise b ”
3. On suppose que 173 divise a . Montrer que 173 divise $a+b$
4. On suppose que 173 ne divise pas a
   a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $a^{172}\equiv b^{172}[173]$
   b) Montrer que $a^{171}(a+b)\equiv 0[173]$
   c) En déduire que $a+b\equiv 0[173]$

Deuxième partie

Soit dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation (E) : $x^3+y^3=173(xy+1)$

Soit (x,y) une solution de (E) . On pose $x+y=173k$ avec $k\in\mathbb{N}^*$

1. Vérifier que $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$
2. Montrer que $k=1$ puis résoudre l'équation (E)

Sujet 11: (Bacc 2015 Norm)

Soit x un entier relatif tel que : $x^{1439}\equiv 1436[2015]$

1. Sachant que $1436\times 1051-2015\times 749=1$ montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux
2. Soit d un diviseur commun de x et 2015
   a) Montrer que d divise 1436
   b) Déduire que x et 2015 sont premiers entre eux
3. a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $x^{1440}\equiv 1[5]$ et $x^{1440}\equiv 1[13]$ et $x^{1440}\equiv 1[31]$
   b) Montrer que $x^{1440}\equiv 1[65]$ puis déduire $x^{1440}\equiv 1[2015]$ (Remarquer que $2015=5\times 13\times 31$)
4. Montrer que $x\equiv 1051[2015]$

Sujet 12: (Bacc 2015 Ratr)

1. Soit a un entier naturel. Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors $a^{2016} \equiv 1[13]$
2. Soit dans $\mathbb{N}^*$ l'équation (E) : $x^{2015} \equiv 2[13]$
   a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux
   b) Montrer que $x \equiv 7[13]$
3. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est $S = \{7 + 13k . \quad k \in \mathbb{N}\}$

Sujet 13: (Bacc 2014 Norm)

Soit n un entier naturel non nul. On pose $a_n = 333.....31$ (n fois le nombre 3)

1. Vérifier que a_1 et a_2 sont premiers
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*. \quad 3a_n + 7 = 10^{n+1}$
3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*. \quad 10^{30k+2} \equiv 7[31]$
4. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*. \quad 3a_{30k+1} \equiv 0[31]$ et déduire que 31 divise $3a_{30k+1}$
5. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}^*. \quad n \equiv 1[30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$