Arithmétique

Br-Rachid *www.sc-math.e-monsite.com*

Sujet 1

1. Montrer que 641 est premier
2. Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre 10^5-4
3. Montrer, par récurrence, que $10^{5n+2}+4^{n+1}$ est divisible par 13 pour tout n entier naturel

Sujet 2:

On considère l'équation $(E): 7x-5y=2$

1. a) Montrer que si (x,y) est solution de (E) alors 5 divise $x-1$
   b) Déduire que $\exists k\in\mathbb{Z}.\quad x=5k+1$ et $y=7k+1$
2. Soit $d=PGDC(5k+1,7k+1)$. Montrer que $d=1$ ou $d=2$

Sujet 3:

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère les entiers naturels : $x_n=1+2^{n+1}5^n$ et $y_n=-1+2^{n+1}5^n$

1. Calculer x_1 et y_1
2. Montrer que y_2 est premier
3. Vérifier que x_n et y_n sont impairs pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
4. a) Montrer, par récurrence, que x_n est un multiple de 3
   b) Déduire que y_n n'est pas un multiple de 3
5. a) Montrer que $x_n\wedge y_n=y_n\wedge 2$.
   b) Déduire que x_n et y_n sont premiers entre eux

Sujet 4:

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système : $\begin{cases} x+y=45 \\ x\wedge y=9 \end{cases}$
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$, puis dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x\wedge y=4 \\ x\vee y=16 \end{cases}$

Sujet 5:

On considère la système dans $\mathbb{N}^2$: $(S): \begin{cases} PPMC(a,b)=252 \\ ab=1512 \\ a\geq b \end{cases}$

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 252 et 1512
2. Déduire du système $PGDC(a,b)$
3. Résoudre le système (S)

Sujet 6:

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $2\,PPMC(x,y)+7\,PGDC(x,y)=11$

Sujet 7:

1. Montrer que l'équation $8x-6y-5=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$
2. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $13x-11y-1=0$.
   a) A l'aide des algorithmes d'Euclide et de Bézout, Donner une solution particulière de (E)
   b) A l'aide de l'algorithme de Gauss, Donner la solution générale de (E)
   d) Déterminer les solutions (x,y) de (E) telles que $x\in[-6,5]$
3. Montrer que : $\forall k\in\mathbb{Z}.\quad PGDC(-5+11k,-6+13k)=1$

Sujet 8:

1. Soit : $u_0=0 \quad et \quad u_1=1 \quad et \quad u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$. On pose : $v_n=u_{n+1}-u_n$
2. Montrer que (v_n) est géométrique et calculer v_n en fonction de n
3. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_{n+1}\Delta u_n=1$

Sujet 9:

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+x-1$

1. Etudier f et représenter sa courbe ζ_f dans un repère orthonormé
2. a) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
   b) En déduire que : $\exists! c\in]0,1[.\quad f(c)=0$
3. a) Montrer que $c\notin\mathbb{Q}$

Sujet 10:

1. a) Vérifier que $19\equiv-2[7]$ et $23\equiv2[7]$ et $2^8\equiv1[7]$ et déduire que $19^{54}\times23^{41}\equiv2^{95}[7]$
   b) En déduire de ce qui précède le reste de la division euclidienne de A par 7 ?
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 10^{5n+2}+4^{n+1}\equiv0[13]$ / $10^{5n+2}+4^{n+1}\equiv2[3]$ / $9^{18n+5}\equiv4[7]$ / $9^{18n+5}\equiv4[5]$

Sujet 11:

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Vérifier que : $10^k \equiv 0\ [2]$ et $10^k \equiv 1\ [3]$ et $10^k \equiv 0\ [5]$ et $10^k \equiv 1 [9]$ et $10^k \equiv (-1)^k [11]$
2. Calculer le reste de la division de 82736193 par chacun des nombres 2 et 3 et 5 et 9 et 11
3. Enoncer les règles de divisibilité d'un entier naturel par 2 ou 3 ou 5 ou 9 ou 11

Sujet 12:

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}.\quad 24n^2 + 8n \equiv 0 [16]$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}.\quad (2n+1)^4 \equiv 1 [16]$
2. Montrer, à partir de ce qui précède que : $\forall a \in \mathbb{N}.\quad a^4 \equiv 0 [16]$ ou $a^4 \equiv 1 [16]$

Sujet 13:

On considère l'équation (E): $7x - 5y = 4$

3. a) Montrer que si (x, y) est solution de (E) alors $x \equiv 2 [5]$ et $y \equiv 2 [7]$

   b) Déduire que $x = 5k + 2$ et que $y = 7k + 2$ $(k \in Z)$

4. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ le système (S): $\begin{cases} n \equiv 5 [7] \\ n \equiv 1 [5] \end{cases}$

   Montrer que : $\exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{cases} n = 7k + 1 \\ 7k - 5k' = 2 \end{cases}$. Déduire alors les solutions de (S)

Sujet 14:

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + \bar{3}x - \bar{2} = \bar{0}$
2. Résoudre $xy + x + y \equiv \bar{0}$ dans $(Z/4Z)^2$
3. Montrer en utilisant $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ que $\forall x \in \mathbb{Z}.\quad 7 | x^7 - x$

Sujet 15:

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: $\begin{cases} x + \bar{2}y \equiv \bar{1} \\ \bar{2}x - \bar{3}y \equiv \bar{4} \end{cases}$ et résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: $\begin{cases} x + \bar{3}y \equiv \bar{1} \\ xy \equiv \bar{2} \end{cases}$
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants: $(E)\begin{cases} x \equiv \bar{1} & dans\ \ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ x \equiv \bar{1} & dans\ \ \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \end{cases}$ et $(E)\begin{cases} x \equiv \bar{2} & dans\ \ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ x \equiv \bar{1} & dans\ \ \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \end{cases}$
3. Montrer que le système suivant n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$: $(E)\begin{cases} x \equiv \bar{2} & dans\ \ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ x \equiv \bar{3} & dans\ \ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \end{cases}$