Sujet 1 :

Soit $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$ définie sur IR

1. Etudier continuité et les variations de f sur IR
2. Montrer que f est bijective de IR vers $]0,+\infty[$ puis expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$
3. Représenter les courbes de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Sujet 2 :

1. Soit f bijective de l'intervalle I vers l'intervalle J. Montrer que f et f^{-1} ont les mêmes variations
2. g est une fonction continue et bijective de $I=[-r,r]$ vers $J=g(I)$ avec g impaire.
3. Montrer que $g(0)=0$
4. Montrer que J est un intervalle symétrique de centre 0
5. Montrer g^{-1} est impaire

Sujet 3:

Soit $f(x)=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x\in IR^*$

1. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition
2. Etudier la continuité et la monotonie de f sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$
3. Déterminer $f(IR^*)$
4. Transformation de f

   a) Vérifier que : $\forall x>0.\ \exists!\, t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[.\quad x=\tan(t)$

   b) Déduire que : $\forall x>0.\quad f(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan(x)$ et que : $\forall x>0.\ \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

   c) Evaluer $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ pour tout $x<0$
5. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{2}}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\pi}{2}}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Sujet 4:

Soit l'équation dans $[-1,1[-\{0\}$: $Arc\tan(\frac{x^2-1}{x^2})+Arc\tan x=-\frac{\pi}{2}\quad (E)$

1. Résoudre (E) dans $[-1,1[-\{0\}$
2. Résoudre dans $[-1,1[-\{0\}$ l'inéquation $(F): Arctgx+Arctg\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)\geq\frac{-\pi}{2}$

Sujet 5 :

1. Considérons la fonction $u(x)=\tan(x)-x$ pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$
2. Montrer que l'unique solution de $u(x)=0$ dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ est 0
3. Déduire que : $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[.\quad \arctan(x)\leq x$
4. Soit la suite : $u_0=\sqrt{2}$ et $u_{n+1}=Arctg(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
5. Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$
6. Montrer que la suite (u_n) est monotone. Déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite

Sujet 6:

Soit : $f(x)=\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$ définie sur IR

1. Montrer que f est strictement positive
2. Montrer que la courbe de f admet un centre de symétrie d'abscisse 0
3. Montrer que f est continue et est strictement décroissante sur IR et déterminer $f(IR)$
4. Montrer que : $\forall x\in IR.\quad f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}Arctanx$
5. Montrer que f est bijective de IR vers $]0,+\infty[$ et déterminer sa réciproque f^{-1}
6. Poser le tableau des variations de f et représenter les courbes de f et de f^{-1}

Sujet 7 :

Soit $f(x)=\frac{1+cosx}{sinx}\qquad x\in I=]0,\pi[$

1. Calculer les limites de f en 0 à droite et en π à gauche
2. Etudier les variations de f sur I
3. Montrer que f est bijective de I vers $\mathbb{R}$. Déterminer $f^{-1}(x)$
4. Justifier l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f^{-1}(x)=x$ dans $]0,\pi[$

Sujet 8:

Soit $f(x)=Arctgx+2x-1$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
2. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha\in]0,1[$
3. Montrer que : $\forall x>\alpha.\quad f(x)>x$
4. Soit : $u_0>\alpha$ *et* $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_n>\alpha$
   b) Etudier la monotonie de (u_n). Déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite

Sujet 9:

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*.\quad \exists! \alpha_n \in]0,+\infty[.\quad Arctg(\alpha_n)=\frac{1}{n}.$ Préciser α_1
2. Montrer que : $\forall n \in \in.\quad \alpha_{n+1}<\alpha_n$
3. Montrer que la suite (α_n) est convergente et calculer sa limite

Sujet 10:

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, On pose $f_n(x)=\sqrt{x}\arctan(x)-n$ avec $x\in[0,+\infty[$

1. Montrer que l' équation $\sqrt{x}\arctan(x)-n=0$ admet une solution unique $a_n \in IR^*$
2. Montrer que : $\forall n\in IN^*.\quad f_n(a_{n+1})>0$
3. Déduire que la suite (a_n) est strictement croissante
4. Calculer lim $\sqrt{a_n}\arctan(a_n)$
5. Déduite que la suite (a_n) n'est pas majorée et calculer lim (a_n)

Sujet 11:

1. Résoudre dans IR : $\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}=0$ / $\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}+2=0$ / $\sqrt[3]{x^2+8}-2<x$
2. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}}}$ et $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x+\sqrt[4]{x}-2}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}$

Sujet 12:

Partie 1 : Soit : $f(x)=\left(\sqrt[3]{1-x}-1\right)^3+1$ définie sur $]-\infty,1]$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$ et $f\left(\frac{7}{8}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
2. Montrer soigneusement que f est une continue et est strictement monotone sur $]-\infty,1]$
3. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[0,1]$
4. Montrer que f admet un nombre fixe unique c et que $c\in[0,1]$. Calculer c
5. Montrer que f est bijective de $]-\infty,1]$ vers un intervalle J et donner l'expression de $f^{-1}(x)$
6. Montrer que tout les nombres de $[0,1]$ sont fixes par *fof*
7. Calculer $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x}$. En donner une interprétation graphique
8. Représenter graphiquement les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un repère orthonormé

Partie 2 : Soit la suite $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 0\le u_n\le1$
2. Montrer que (u_n) n'est pas monotone
3. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_{n+2}=u_n$
4. Déduire que les sous suite (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont constantes
5. Montrer que la suite (u_n) est divergente

Sujet 13:

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(1+x)^{\frac{2}{3}}-(1+x)^{\frac{1}{3}}-2=0$

   b) Déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $(1+x)^{\frac{2}{3}}-(1+x)^{\frac{1}{3}}-2<0$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(\sqrt{x}-1)^{\frac{3}{4}}}{x-1}$

Sujet 14:

Soit $f(x)=(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

1. Déterminer D, le domaine de définition de f
2. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition
3. Déterminer, par composition, les variations de f et poser le tableau des variations
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}$
5. Représenter graphiquement f
6. Montrer que f est bijective de D vers D, et déterminer sa réciproque

Sujet 15:

1. $u_0\in]0,1[$ *et* $u_{n+1}=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-u_n})$

   a) Montrer que (u_n) est bornée par 0 et $1/2$ pour tout n non nul

   b) Montrer que (u_n) est monotone

   c) Montrer que (u_n) est CV et calculer sa limite

2. Montrer que $\exists!\,\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. $\sin\theta=\sqrt{u_0}$. Montrer que $u_n=\sin^2(\frac{\theta}{2^n})$ et calculer $\lim u_n$

3. Soit $v_n=\sqrt[n]{u_n}$

   a) Montrer que $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. $\frac{2}{\pi}x\leq \sin x\leq x$

   b) Déduire $\lim v_n$