ARRET - BILAN

Br-Rachid http://www.sc-math.e-monsite.com

Sujet :

Partie 1 **: On définie sur l'intervalle** $I=[0,+\infty[$ **la fonction** f **par :** $e^{-x}f(x)=e^{x}-2$

1. **Résoudre l'équation** $f(x)=0$ **dans** I
2. **a) Calculer la dérivée de** f **sur** I **et montrer que** $\forall x\geqslant \ln(2).\quad f'(x)\geqslant 2$
   b) Calculer $J=f(I)$
3. **a) Montrer que** f **est bijective de** I **vers** J **. Donner l'expression de** $f^{-1}(x)$
   b) Montrer que l'équation $x-f^{-1}(x)=0$ **admet une solution unique** $\lambda\in]0,1[$
   c) Montrer que : $\forall x\geqslant 0.\quad 0\leqslant (f^{-1})'(x)\leq \frac{1}{2}$
4. **Calculer la dérivée seconde de** f **et étudier la concavité de sa courbe représentative**
5. **Montrer que** f **est solution d'une équation différentielle d'ordre** 2 **et à coefficients réels dont on précisera des conditions initiales**

Partie 2 **: On définie la suite** (u_n) **par :** $u_0=0$ **et** $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$ **pour tout** $n\in\mathbb{N}$

1. **Montrer que** (u_n) **est positive**
2. **Montrer que** (u_n) **est convergente et de limite** λ

Partie 3 **:**

1. **a) Montrer que :** $\forall x>0.\quad 0<\frac{f(x)+1}{x}<f'(x)$
   b) Déduire les variations de la fonction $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ **sur** $]0,+\infty[$
2. **Soit** $F(x)=\int_{x}^{2x}\frac{f(t)}{t}dt$ **pour tout** $x>0$ **et** $F(0)=-\ln 2$
   a) Montrer, en utilisant 1,a) que : $\forall x>0.\quad 0\leqslant F(x)+\ln 2\leqslant f(2x)-f(x)$
   b) Montrer que F **est continue et est dérivable en** 0 **à droite**
3. **a) Montrer que :** $\forall x>0.\quad F(x)\geqslant f(x)\int_{x}^{2x}\frac{1}{t}dt$
   b) Déduire la branche infinie de la courbe de F
4. **a) Montrer que** F **est dérivable sur** $]0,+\infty[$ **et que sa dérivée est** $F'(x)=\frac{f(2x)-f(x)}{x}$
   b) Représenter graphiquement la courbe de F **dans un repère orthonormé**

Sujet :

On lance un dès équilibré, cubique à six faces numérotées de 1 **à** 6 **deux fois de suites. Le résultat de chaque lancé est noté** (x,y) **. On note** d **le PGDC de** x **et** y **:** $d=x\wedge y$

Soient A **: «** $x\equiv 0[2]$ **» et** B **: «** $y\equiv 0[2]$ **» et** C **: «** $xy\equiv 0[2]$ **» et** D **: «** $xy\equiv 0[3]$ **»**

1. **a) Calculer** $P(A)$ **et** $p(B)$ **et** $p(A\cap B)$
   b) Déduire $P(C)$
2. **Calculer** $P(D)$ **et** $p_A(D)$
3. **Déterminer la loi de probabilité de** d **et calculer son espérance mathématique**
4. **Calculer** $p(x\vee y=xy)$
5. **Si on lance le dès trois fois de suite, calculer** $p(x\wedge y\wedge z=2)$ **(** (x,y,z) **= Résultat du lancé)**