ARRET - BILAN

Br-Rachid http://www.sc-math.e-monsite.com

Sujet :

Soit la fonction définie sur $[0,1]$ **par** $F(0)=1$ **et** $F(x)=\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+2x)}{2x^2}$ **pour** $x>0$

1. **Soit** $x\in[0,1]$ **. Montrer que :** $\forall t\in[0,x].\quad \frac{1}{1+2x}\leqslant\frac{1}{1+2t}\leqslant 1$
2. **Soit** $x\in]0,1]$ **.**

   a) Montrer que $F(x)=\frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$

   b) Montrer que $\frac{1}{1+2x}\leqslant F(x)\leqslant 1$ **. Déduire que** F **est continue à droite en** 0
3. **Montrer que** $\int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt=\frac{x^2}{1+2x}+2\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$ **(Utiliser une intégration par parties)**
4. **Soit** $x\in]0,1]$ **.**

   a) Montrer que $F'(x)=\frac{-4}{x^3}\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

   b) Montrer que $\frac{-4}{3}\leqslant F'(x)\leqslant\frac{-4}{3(1+2x)^2}$

   c) Montrer que $\frac{-4}{3}\leqslant\frac{F(x)-F(0)}{x}\leqslant\frac{-4}{3(1+2x)^2}$
5. **Déduire que** F **est dérivable en** 0 **à droite et préciser le nombre dérivée**

Sujet :

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ **entier naturel non nul, on pose** $f_n(x)=x+\frac{e^{-x}}{n}$ **avec** $x\in\mathbb{R}$

1. **Calculer les limites de** f_n **en** $+\infty$ **et en** $-\infty$
2. **a) Etudier la branche infinie de** C_{f_n} **au voisinage de** $-\infty$

   b) Montrer que la droite $(D): y=x$ **est asymptote à** C_{f_n} **au voisinage de** $+\infty$ **et préciser la position de** C_{f_n} **et** (D)
3. **Poser le tableau des variations de** f_n **puis représenter** C_{f_3} **dans un repère orthonormé**
4. **a) Montrer que :** $\forall n\geqslant 3.\quad \frac{e}{n}<\ln(n)$

   b) Montrer que pour tout $n\geqslant 3$ **l'équation** $f_n(x)=0$ **admet exactement deux solutions** x_n **et** y_n **telles que** $x_n\leqslant-\ln(n)$ **et** $\frac{-e}{n}\leqslant y_n\leqslant 0$

   c) Calculer $\lim x_n$ **et** $\lim y_n$
5. **On considère la fonction définie par** $g(0)=-1$ **et** $g(x)=-1-xLnx$ **pour tout** $x>0$

   a) Montrer que g **est continue en** 0 **à droite**

   b) Vérifier que pour tout $n\geqslant 3$ **, on a :** $g\left(\frac{-1}{x_n}\right)=\frac{\ln(n)}{x_n}$

   c) En déduire $\lim\frac{\ln(n)}{x_n}$

Sujet :

I. **Soit** $F(x)=\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt$ **avec** $0<x\leqslant 1$

1. **Montrer que :** $\forall 0<x\leqslant 1 \quad F(x)\geqslant\frac{-\ln(x)}{e}$ **et déduire** $\lim_{x\to 0^+} F(x)$
2. **Montrer que** F **est dérivable sur** $]0,1]$ **puis déterminer ses variations sur** $]0,1]$
3. **Montrer que :** $\forall n\geqslant 3.\ \exists u_n\in]0,1].\quad F(u_n)=n$
4. **Calculer** $\lim (u_n)$

II. **Soit** $g(t)=\frac{e^{-t}-1}{t}$ **si** $0<t\leqslant 1$ **et** $g(0)=-1$

On pose $G(x)=\int_x^1 g(t)\,dt$

1. **Montrer que** g **est continue sur** $[0,1]$
2. **Montrer que** G **est continue sur** $[0,1]$
3. **Montrer que** $\forall n\geqslant 3.\quad G(u_n)=n+\ln(n)$
4. **Calculer** $\lim (e^n u_n)$