Sujet :

Soit $p\neq 2$ **un nombre premier de** $\mathbb{N}$ **. Soit** $r\in\mathbb{N}^{*}$ **. Soit** $a\in\mathbb{Z}$ **avec** $a^{2}\equiv 1\ [p^{r}]$

1. **a) Vérifier que** $a^{2}\equiv 1\ [p]$

   b) Montrer que p **divise** $a-1$ **oubien** p **divise** $a+1$

2. **a) Montrer que si** p **divise** $a-1$ **alors** p **et** $a+1$ **sont premiers entre eux**

   b) Montrer que si p **divise a** $a+1$ **lors** p **ets** $a-1$ **ont premiers entre eux**

   c) Déduire que $a\equiv 1\ [p^{r}]$ **oubien** $a\equiv -1\ [p^{r}]$

3. **Montrer que** $a^{2}\equiv 1\ [p^{r}]$ **ssi** $a\equiv 1\ [p^{r}]$ **oubien** $a\equiv -1\ [p^{r}]$

4. **Résoudre dans** $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ **l'équation** $x^{2}+\bar{2}x=\bar{0}$

Sujet :

I. **1- Montrer que** $\forall t\geqslant 0.\quad 1-\frac{1}{2}t^{2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+t^{2}}}\leqslant 1$

   2- Déduire que $\forall x\geqslant 0.\quad x-\frac{1}{6}x^{3}\leqslant\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\leqslant x$

II. **On considère la suite** $u_{n}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n+k}\qquad (n\in\mathbb{N}^{*})$

   1. **Montrer que** (u_{n}) **est croissante et majorée**
   2. **Déduire que** (u_{n}) **est convergente et que** $\lim\,(u_{n})=\ln 2$

III. **On considère la suite** $u_{n}=\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(\frac{1}{n+k}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{n+k}\right)^{2}}\right)\qquad (n\in\mathbb{N}^{*})$

   En utilisant ce qui précède, calculer $\lim\,(v_{n})$

Sujet :

On considère la suite $u_{n}=\int_{0}^{1}(1-x)^{n}e^{2x}dx\qquad (n\in\mathbb{N}^{*})$

1. **Calculer** u_{1}
2. **Montrer que** $\forall n\in\mathbb{N}^{*}.\quad u_{n}=\frac{1}{2}\int_{1}^{e^{2}}(1-\ln\sqrt{x})^{n}dx$
3. **Encadrer convenablement** u_{n} **et montrer que** $lim u_{n}=0$
4. **a) Montrer que** $\forall n\in\mathbb{N}^{*}.\quad 2u_{n+1}=(n+1)u_{n}-1$

   b) Déduire $\lim\,(nu_{n})$
5. **Pour tout** $n\in\mathbb{N}^{*}$ **, on pose** $v_{n}=\frac{2^{n}}{n!}u_{n}$

   a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^{*}.\quad\frac{2^{n-1}}{n!}\leqslant 1$

   b) Montrer que $v_{n}\leqslant 2\frac{e^{2}}{(n+1)}$ **et calculer** $lim v_{n}$
6. **a) Montrer que** $\forall n\in\mathbb{N}^{*}.\quad v_{n+1}=v_{n}-\frac{2^{n}}{(n+1)!}$

   b) Déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^{*}.\quad v_{n}=\frac{1}{2}\left(e^{2}-\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^{k}}{k!}\right)$

   c) Calculer $\lim\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^{k}}{k!}$

Br-Rachid --- sc-math.e-monsite.com