Sujet :

A- Soit $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$ $\quad(x\geqslant 0)$

1. **Etudier les variations de** g **sur** $[0,+\infty[$
2. **En déduire le signe de** g **sur** $[0,+\infty[$

B- f **est la fonction définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $f(x)=e^{x}\ln(1+e^{-x})$

1. **Montrer que** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$
2. **Montrer que pour tout** $x\in\mathbb{R}.$ $f'(x)=e^{x}g(e^{-x})$
3. **Dresser le tableau des variations de** f **et représenter graphiquement les courbe de** f **et de** $-f$
4. **Montrer que** $\forall x\in[-1,0].$ $0<f'(x)\leqslant g(e)$
5. **Montrer que l'équation** $f(x)+x=0$ **admet une solution unique** c **appartenant à** $[-1,0]$
6. **Soit** $u_0=0$ **et** $u_{n+1}=-f(u)_n$ **pour tout** $n\in\mathbb{N}$
   a) **Montrer que** $\forall n\in\mathbb{N}.$ $-1\leqslant u_n\leqslant 0$
   b) **Montrer que** $\forall n\in\mathbb{N}.$ $|u_{n+1}-c|\leqslant g(e)|u_n-c|$ **. Déduire que** $|u_n-c|\leqslant(g(e))^{n}|c|$
   c) **Sachant que** $g(e)<0{,}6$ **, calculer** $lim u_n$

Sujet :

Soit a **un entier relatif tel que** $a\wedge 10=1$

1. **Montrer que** a **est impair et que** $a\wedge 5=1$
2. **Montrer que** $a^{4}\equiv 1\ [2]$ **et** $a^{4}\equiv 1\ [5]$ **et déduire que** $a^{4}\equiv 1\ [10]$
3. **Montrer par récurrence que :** $\forall n\in\mathbb{N}.$ $a^{4\times 10^{n}}\equiv 1[10^{n+1}]$ **et déduire que** $a^{8\times 10^{n}+1}\equiv a[10^{n+1}]$
4. **Déterminer** $N\in\mathbb{N}$ **tel que** N^{3} **se termine, en base** 10 **, par** 123456789

Sujet :

On définie dans $\mathbb{R}$ **la loi de composition interne :** $x\star y=x+y-e^{xy}+1$

1. **Vérifier que** $\star$ **est commutative dans** $\mathbb{R}$
2. **Calculer** $x\star 0$ **pour tout** $x\in\mathbb{R}$ **et déduire que** $\star$ **admet un élément neutre dans** $\mathbb{R}$
3. **Montrer que l'équation** $2\star x=0$ **admet exactement deux solutions** a **et** b **non nulles dans** $\mathbb{R}$
4. **Déduire que** $\star$ **n'est pas associative**

Sujet :

1. **Donner le reste de la division euclidienne de** 7^{2015} **par** 13
2. a **étant un entier, montrer que si** $a\wedge 13=1$ **alors** $a^{2016}\equiv 1[13]$
3. **Soit** x **une solution dans** $\mathbb{Z}$ **de l'équation** (E) **:** $x^{2015}\equiv 2[13]$
   a) **Montrer que** $x\wedge 13=1$
   b) **Montrer que** $x\equiv 7[13]$
   c) **Montrer que l'ensemble des solution de** (E) **est** $S=\{7+13k\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$
4. **Une urne contient** 50 **boules indiscérnables au toucher et numérotées de** 1 **à** 50
   a) **On tire au hasard une boule de l'urne. Quelle est la probabilité qu'elle porte un numéro qui soit solution de** (E) **?**
   b) **On tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que deux boules exactement, portent des numéros solutions de** (E) **?**