ARRET - BILAN

Br-Rachid http://www.sc-math.e-monsite.com

Sujet :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ **, on définie sur** $]-1,+\infty[$ **la suite de fonctions** $f_n(x)=\dfrac{e^x}{(1+x)^n}$

ζ_{f_n} **est la courbe représentante de** f_n **dans un repère orthonormé (unité de mesure** $2cm$)

Partie A :

1. **Montrer que toutes les courbes** ζ_{f_n} **passent par un même point à déterminer**
2. **a) Poser le tableau des variations de** f_n
   b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}.\quad f_n'(x)=f_n(x)-nf_{n+1}(x)$
3. **a) Préciser les branches infinies de** ζ_{f_n}
   b) Etudier la position de ζ_{f_1} **par rapport à** ζ_{f_2}
   c) Représenter graphiquement ζ_{f_1} **et** ζ_{f_2}
4. **Calculer l'aire du domaine limité par les courbes** ζ_{f_1} **et** ζ_{f_2} **et les droites** $(x=0)$ **et** $(x=1)$
5. **On pose** $I_0=\int_0^1 f_1(x)dx$
   Calculer en fonction de I_0 **le volume du solide de révolution obtenue par une rotation complète de** S **autour de** (OY) **avec** S **le domaine limité par** ζ_{f_1} **et** (OY) **et** $(y=1)$ **et** $(y=\frac{e}{2})$

Partie B :

1. **Montrer que pour tout** $n\in\mathbb{N}^*$ **, la fonction** f_n **admet sur** $]-1,+\infty[$ **une valeur minimal** u_n
2. **Montrer que** $\forall n\in\mathbb{N}.\ \forall x>-1.\quad f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$
3. **En déduire que la suite** (u_n) **est décroissante**
4. **Montrer que la suite** (u_n) **est convergente et que** $\lim(u_n)=0$

Partie C :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ **, on pose** $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$

1. **Montrer que la suite** (I_n) **est monotone et déduire qu'elle est convergente**
2. **Montrer que** $\lim(I_n)=0$
3. **Etblir la relation entre** I_{n+1} **et** I_n
4. **Calculer** $\lim(nI_n)$

Partie D :

Soit la fonction $F(x)=\int_0^{Lnx} f_2(t)\,dt$ **définie pour tout** $x>\frac{1}{e}$

1. **Justifier que** F **est bien définie sur** $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$
2. **Montrer que :** $\forall x\in\left]\frac{1}{e},1\right[.\quad F(x)\leq\dfrac{xLnx}{1+Lnx}$ **et déduire** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^+}F(x)$
3. **a) Montrer, par parties, que :** $\forall x\geq 1.\quad F(x)=\dfrac{x}{(1+Lnx)^2}-1+2\int_0^{Lnx} f_3(t)dt$
   b) Déduire que : $\forall x\geq 1.\quad F(x)\geq\dfrac{x}{(1+Lnx)^2}-1$ **et déduire** $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$
4. **Montrer que** F **est bijective de** $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ **vers** $\mathbb{R}$