Sujet 2:

Soit F **la fonction définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $F(x)=\int_0^1 \left(\frac{1}{(1+t^2)^x}\right)dt$

1. **Calculer** $F(0)$ **et** $F(1)$
2. a) **En posant** $t=\frac{e^u-e^{-u}}{2}$ **Calculer** $F(\frac{1}{2})$

   b) **Retrouver le même résultat par le changement de variable** $t=\tan(u)$ **puis par** $z=\tan(\frac{u}{2})$
3. a) **Par une intégration par parties, montrer que** $\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt=\frac{1}{n2^{n+1}}+\frac{1}{2n}F(n)$

   b) **Trouver une relation de récurrence liant** $F(n+1)$ **et** $F(n)$

   c) **Calculer** $F(2)$
4. **Montrer que** F **est décroissante sur** $\mathbb{R}$
5. a) **Soit** $x<0$ **. Montrer que la fonction** $h:x \rightarrow e^{-xLn(1+t^2)}$ **est décroissante sur** $[\frac{1}{2},1]$

   b) **Montrer que :** $\forall x<0.\quad F(x)\geqslant\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-xLn(1+t^2)}dt$

   c) **Déduire de ce qui précède que :** $\forall x<0.\quad F(x)\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^x$

   d) **En déduire la branche infinie de la courbe de** F **au voisinage de** $-\infty$
6. a) **Montrer que :** $\forall t\in[0,1].\quad \frac{1}{2}t^2\leqslant\ln(1+t^2)$

   b) **En déduire que :** $\forall x\geqslant0.\quad F(x)\leqslant\int_0^1 e^{\frac{-xt^2}{2}}dt$

   c) **Montrer que :** $\forall x>0.\quad \int_0^1 e^{\frac{-xt^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{\frac{-u^2}{2}}du$

   d) **Montrer que :** $\forall x\geqslant1.\quad \int_0^{\sqrt{x}} e^{\frac{-u^2}{2}}du\leqslant\int_0^1 e^{\frac{-u^2}{2}}du + \int_0^1 e^{\frac{-u}{2}}du$

   e) **En déduire que** $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$
7. **On admet que** $F'(0)=-\int_0^1 \ln(1+t^2)dt$ **. Calculer** $F'(0)$
8. **Représenter graphiquement la courbe de** F **dans un repère orthonormé**

Sujet 2:

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ **par :** $G(x)=\int_1^2 \frac{2^{\sqrt{x}t}}{t}dt$

1. **Montrer que :** $\forall x>0.\quad G(x)=\int_{\sqrt{x}\ln 2}^{\sqrt{x}\ln 4}\frac{e^u}{u}du$
2. **Montrer que G est dérivable sur** $\mathbb{R}^{+*}$ **calculer sa dérivée**