ARRET - BILAN

Br-Rachid http://www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 1 :

On considère dans $\mathbb{C}$ **l'équation (E) :** $z^2-\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)z+i=0$

1. **Vérifier que** $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$
2. a) **Vérifier que** $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}$ **est solution de (E)**

   b) **Déduire** z_2 **l'autre solution de (E)**
3. **Ecrire** $1+i$ **sous sa forme exponentielle et déduire les valeurs de** $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **et** $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
4. **Montrer que :** $\frac{i-z}{i+z}=e^{i\theta} \Leftrightarrow z=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ **pour tout** $\theta\in\mathbb{R}-\{(2k+1)\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$
5. **Déduire l'ensemble des solutions de l'équation :** $\left(\frac{i-z}{i+z}\right)^2+i\left(\frac{i+z}{i-z}\right)^2-\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)=0$

Sujet 2 :

Soit l'ensemble $G=\left\{M_x=\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ xe^x & e^x \end{pmatrix} \quad x\in\mathbb{Z}\right\}$

1. a) **Montrer que G est stable dans** $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

   b) **En utilisant un morphisme convenable, montrer que** $(G,\times)$ **est un groupe abélien**
2. a) **Déterminer l'inverse de tout élément de** $(G,\times)$

   b) **Calculer la puissance n**$^{\text{ieme}}$ **de tout élément de** $(G,\times)$ **avec** $n\in\mathbb{N}$
3. **Soit** $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. **On considère l'ensemble** $H=\{(M_a)^n\times(M_b)^m.\quad (n,m)\in\mathbb{Z}^2\}$

   a) **Montrer que** H **est un sous groupe de** $(G,\times)$

   b) **Soit** $c\in\mathbb{Z}$ **. Montrer que :** $M_c\in H \Leftrightarrow (a\wedge b)/c$

   c) **Déduire que :** $G=H \Leftrightarrow (a\wedge b)=1$

Sujet 3:

Soit $E=\left\{M_{(a,b)}=\begin{pmatrix} a & b\sqrt{3} \\ \frac{-b}{\sqrt{3}} & a \end{pmatrix}.\quad (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1. **Montrer que** $(E,+,.)$ **est** $\mathbb{R}$ **- espace vectoriel de dimension** 2
2. **Soit l'application** $\varphi:\mathbb{C}\to E$ **qui associe à tout** $a+ib$ **de** $\mathbb{C}$ **l'élément** $M_{(a,b)}$ **de** E **a)**

   a) **Montrer que** φ **un isomorphisme de** $(\mathbb{C},+)$ **vers** $(E,+)$ **et de** $(\mathbb{C}^*,\times)$ **vers** $(E^*,\times)$

   b) **Déduire la structure de** $(E^*,\ \times)$ **. Déterminer l'inverse d'un élément de** E^*

   a) **Calculer la puissance n**$^{\text{ieme}}$ **de** $M_{(1,1)}$ **avec** $n\in\mathbb{N}$
3. **Montrer que** $(E,+,\times)$ **est un corps commutatif**
4. **Résoudre dans** E **l'équation** $JX^3=I$ **avec** $J=M_{(1,1)}$