Sujet :

1. **Montrer que :** $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}.\quad e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t) e^t \, dt$

   On considère les suites $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!}$ **et** $v_n = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t \, dt$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$

2. **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}^*.\quad v_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + v_{n+1}$ **. Déduire que:** $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + v_n$

3. **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}^*.\quad 0 \le v_n \le (e^x - 1) \frac{x^n}{n!}$

4. **Soit** $w_n = \frac{x^n}{n!}$ **. Montrer que** $\exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geqslant n_0.\quad \frac{w_{n+1}}{w_n} < \frac{1}{2}$ **et déduire** $\lim (w_n)$

5. **Calculer** $\lim (u_n)$

Sujet : On pose pour tout $x > 0$ par $F(x) = \int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$

1- a) **Etudier le signe de** F **sur** IR^{+*}

b) **Montrer que** F **est strictement croissante sur** $]0, +\infty[$

2- **Par changement de variable** $u = \sqrt{e^t - 1}$, **montrer que** $\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2}$

3- **Déterminer les branches infinies de la courbe de** F

4- **Calculer** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{F(x) + \frac{\pi}{2}}{x} \right)$ **et interpréter graphiquement le résultat obtenu**

5- **Montrer** F **est bijective de** $]0, +\infty[$ **vers un intervalle** J **et déterminer sa réciproque** F^{-1}

Sujet :

I. **Soit** $I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$ **. Par la forme canonique de** $x(1-x)$ **montrer par un changement de variable que** $I = \frac{\pi}{8}$

II. **Soit la suite définie par** $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$

1. **Montrer que** (u_n) **est convergente et calculer sa limite à l'aide d'une somme de Reimann**

2. **Montrer que** $\lim \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k(n-k)}{n^4} = 0$

III. **On considère la suite** $p_n = \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$

1. **Montrer que :** $\forall x \geqslant 0.\quad x - \frac{1}{2} x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

2. **Encadrer** $\ln(p_n)$ **et montrer que** $lim p_n = e^{\frac{\pi}{8}}$