Sujet :

Partie 1 :

Soit $u(x)=(x-1)^2 e^{4-2x}$**. Calculer les nombres réels** a **et** b **et** c **pour que la fonction** $(ax^2+bx+c)e^{4-2x}$ **soit une primitive de** u **sur** $\mathbb{R}$

Partie 2 :

Soit $f(x)=(x-1)e^{2-x}$**.**

ζ_f **est sa courbe dans un repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$ **d'unité** $2cm$

1- **Déterminer les deux branches infinies de** ζ_f **aux voisinages de** $+\infty$ **et de** $-\infty$

2- **Calculer la dérivée de** f **puis représenter graphiquement** ζ_f **dans** $(O,\vec{i},\vec{j})$

3- **Soit** $\mu>1$**.**

a) **Calculer en fonction de** μ **l'aire** $A(\mu)$ **délimité par les droites** $x=1$ **et** $x=\mu$ **et** $(y=0)$ **et** ζ_f **et déduire** $\lim\limits_{\mu\to+\infty} A(\mu)$

b) **Calculer le volume** $V(\mu)$ **du solide obtenu par une rotation complète autour de** (Ox) **de** ζ_f **.**

Déduire $\lim\limits_{\mu\to+\infty} V(\mu)$

Partie 3 :

Soit la fonction $F(x)=\int_x^{x+1}\frac{f(t)}{(t-1)^2}dt$ **avec** $x>1$**.** C_F **est sa courbe dans** $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- **Montrer que** F **est dérivable et que :** $\forall x>1.\quad F'(x)=\frac{-e^{1-x}}{x(x-1)}((e-1)x+1)$

Déduire les variations de F **sur** $]1,+\infty[$

2- **Vérifier que :** $\forall t>1.\quad 0\leq\frac{f(t)}{(t-1)^2}\leq\frac{1}{(t-1)^2}$**. Déduire que :** $x>1.\quad 0\leq F(x)\leq\frac{1}{x(x-1)}$

3- **Calculer** $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ **et interpréter le résultat graphiquement**

4- a) **Montrer que :** $\forall x>1.\ \forall t\in]x,x+1[.\quad \frac{f(t)}{(t-1)^2}\geqslant\frac{e^{1-x}}{t-1}$

b) **Déduire que :** $\forall x>1.\quad F(x)\geqslant e^{1-x}\ln(\frac{x}{x-1})$

5- **Déterminer la branche infinie de la courbe de** F **en** 1 **à droite**

6- **Représenter graphiquement la courbe** F **dans** $(O,\vec{i},\vec{j})$