**ARRET - BILAN**

*Br-Rachid* http://www.sc-math.e-monsite.com

# Sujet

## Partie 1 :

**Soit** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$ **pour tout** $x\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}$ **et** $f(1)=1$

1- a) **Montrer que** $f$ **est continue sur** $\mathbb{R}^{+*}$

b) **Montrer que :** $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}.\quad f(\dfrac{1}{x})=xf(x)$

2- **Calculer les limites de** $f$ **en** $0$ **à droite et en** $+\infty$ **et interpréter les résultats obtenus**

3- a) **Montrer que** $\displaystyle\int_0^t \frac{u^2}{1+u}du=\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}$ **pour tout** $t>-1$

b) **Montrer d'autre part que pour tout** $t>-1$ **, on a :** $\left|\displaystyle\int_0^t \frac{u^2}{1+u}du\right|\leqslant t^2|\ln(1+t)|$

c) **Déduire que** $f$ **est dérivable en** $1$ **et donner** $f'(1)$

4- a) **Montrer que** $f$ **est décroissante sur** $\mathbb{R}^{+*}$

b) **Représenter la courbe de** $f$ **dans un repère orthonormé**

## Partie 2 :

**On donne** $G(x)=\displaystyle\int_x^{x^2} f(t)dt$ **pour tout** $x\neq 0$ **et** $G(0)=0$

1. **Montrer que** $G$ **est définie sur** $\mathbb{R}^{+}$

2. a) **Montrer que :** $\forall x>0.\quad \dfrac{2xLnx}{x+1}\leqslant G(x)\leqslant xLnx$

   b) **Etudier la continuité et la dérivabilité de** $G$ **en** $0$ **à droite**

3. a) **Calculer** $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$

   b) **Montrer que :** $\forall\, 0<u<1.\quad G(\dfrac{1}{u})=-\displaystyle\int_u^{u^2}\frac{f(t)}{t}dt$ **(Faire un changement de variable)**

   c) **En posant** $u=\dfrac{1}{x}$ **, Calculer** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{G(x)}{x}$ **. Interpréter ce résultat graphiquement**

4. a) **Poser le tableau des variations de** $G$

   b) **Représenter graphiquement la courbe de** $G$