Sujet :

F **est définie sur** $\mathbb{R}^*$ **par :** $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

1. **Montrer que** F **est impaire**
2. **Pour tout** $x>0$ **, on pose** $\varphi(x)=\int_1^{x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

   a) Etablir une relation liant les fonctions F **et** φ **sur** $]0,+\infty[$

   b) Montrer que F **est dérivable sur** $]0,+\infty[$ **et calculer sa dérivée** $F'(x)$

   c) Déduire les variations de F **sur** $]0,+\infty[$
3. **a) Montrer que :** $\forall x>0.\quad \exists c\in]x,2x[.\quad F(x)=\frac{x}{\ln(1+c^2)}$

   b) En déduire que : $\forall x>0.\quad \frac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\frac{x}{\ln(1+x^2)}$
4. **Déterminer les branches infinies de la courbe de** F **sur** $]0,+\infty[$
5. **a) Montrer que** $F(\sqrt{e-1})<\sqrt{e-1}$ **et** $F(\frac{\sqrt{e-1}}{2})>\frac{\sqrt{e-1}}{2}$

   b) Déduire que l'équation $F(x)=x$ **admet une solution unique dans** $]0,+\infty[$
6. **a) Montrer que :** $\forall n\in\mathbb{N}.\quad \exists!u_n\in]n,2n[.\quad F(n)=\frac{n}{\ln(1+u_n^2)}$

   b) Montrer que $\lim(u_n)=+\infty$

Sujet :

Pour tout $n\geqslant 2$ **entier naturel, on pose** $f_n(x)=4x^ne^{-x^2}$ **avec** $x\in[0,+\infty[$

1. **Observer que** $e^{-x^2}\leqslant e^{-x}$ **pour tout** $x>1$ **et déduire la limite de** f_n **en** $+\infty$
2. **Poser le tableau des variations de** f_n
3. **Montrer que :** $\forall n\geqslant 2.\quad \exists!u_n\in]0,1[.\quad f_n(u_n)=1$
4. **Montrer que :** $\forall n\geqslant 2.\quad f_{n+1}(u_n)=u_n$
5. **Montrer que la suite** (u_n) **est strictement croissante et est convergente**
6. **On note** l **sa limite de** (u_n)

   a) Montrer que $0<l\leqslant 1$

   b) Montrer que : $\frac{-\ln 4}{n}<\ln(u_n)<\frac{1}{n}-\frac{\ln 4}{n}$

   c) Calculer l