ARRET - BILAN

Br-Rachid http://www.sc-math.e-monsite.com

Sujet : **On considère la fonction** $F(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

1. **Calculer** $F(0)$ **puis montrer que** F **est impaire**
2. **a) Montrer que** $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2}=0$

   b) En déduire par un encadrement adéquat que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$

   c) Calculer calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$
3. **Montrer que F est dérivable sur** $[0,+\infty[$ **et que :** $\forall x\geqslant 0.\quad F'(x)=e^{-2x^2}-2xF(x)$
4. **On considère la fonction composée** $G=F(\tan x)$ **définie sur** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

   a) Justifier que G **est continue sur** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

   b) Montrer que G **admet en** $\frac{\pi}{2}$ **un prolongement par continuité à déterminer**
5. **a) Montrer que :** $\exists c>0.\quad F'(c)=0$

   b) En déduire que : $F(c)=\dfrac{e^{-2c^2}}{2c}$
6. **On définie sur** $]0,+\infty[$ **la fonction** $H(x)=F'(x)\dfrac{e^{x^2}}{2x}$

   a) Montrer que H **est strictement décroissante sur** $]0,+\infty[$

   b) En déduire que c **est unique**
7. **Poser le tableau des variations de** F

Sujet :

I. **Etude des solutions positives de l'équation :** $e^x=x^n$ **avec** $n\in\mathbb{N}^*$

On considère la fonction définie sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$ **par** $f(0)=0$ **et** $f(x)=\dfrac{x}{Lnx}$ **si** $x>0$

1. **Vérifier que pour tout élément de** $[0,1[\cup]1,+\infty[$ **:** $e^x=x^n \Leftrightarrow f(x)=n$
2. **Montrer que** f **est dérivable à droite en** 0
3. **Calculer et interpréter graphiquement les limites de** f **en** 1 **et en** $+\infty$
4. **Donner le tableau des variations de** f **sur** $[0,1[\cup]1,+\infty[$
5. **Montrer que la courbe de** f **admet un point d'inflexion et préciser ses coordonnées**
6. **Représenter la courbe de** f **dans un repère orthonormé**
7. **Montrer que pour** $n\geqslant 3$ **, l'équation** $e^x=x^n$ **admet exactement deux solutions** a_n **et** b_n **telles que** $1<a_n<e<b_n$

II. **Etudes des suites** $(a_n)_{n\geqslant 3}$ **et** $(b_n)_{n\geqslant 3}$

1. **Montrer que :** $\forall n\geqslant 3.\quad b_n\geqslant n$ **puis calculer** $\lim(b_n)$
2. **a) Montrer que la suite** $(a_n)_{n\geqslant 3}$ **est décroissante et est convergente**

   b) Montrer que : $\forall n\geqslant 3.\quad \dfrac{1}{n}\leqslant \ln(a_n)\leqslant\dfrac{e}{n}$ **et déduire** lma_n

   c) Montrer que : $\lim a_n^n=e$