Sujet 1:

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^e \frac{Lnt}{t}dt \quad / \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+3x^2} - 2\sqrt[3]{x}\right)dx \quad / \quad \int_{-1}^{1} \sin^3 x dx \quad / \quad \int_{-1}^{1} \frac{arctg(x)}{1+x^2}dx$$

$$\int_1^{e^{4\pi}} \frac{\cos(Lnx)}{x}dx \quad / \quad \int_1^{e^4} \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx \quad / \quad \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+x}dx \quad / \quad \int_0^2 \frac{|u-1|}{u+1}dt$$

Sujet 2:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$ avec $x \in [0, +\infty[$ et $S = \{M(x,y) \in P. \quad 0 \le x \le 1 \quad et \quad 0 \le y \le f(x)\}$

1. Vérifier que $\forall x \ge 0. \quad f(x) = 1 + \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+1}$ et ca1lculer l'aire de la surface (Domaine) S
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} u_k$ pour tout $n > 0$

   Calculer v_n en fonction de n. Déduire $\lim(v_n)$ et $\lim(u_n)$

Sujet 3:

1- Calculer a et b tels que $\dfrac{1}{x^2+3x+2} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$ puis calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx$

2- Soit : $f(x) = \dfrac{x^4+x^3+2x^2-x}{x^3-1}$

a) Déterminer a et b et c et d et e tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{dx+e}{x^2+x+1}$

b) Calculer $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx$

Sujet 4:

1- On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\, dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t\, dt$. Calculer $I+J$ et $I-J$ et déduire I et J

2- On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{cost}{cost+sint}dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sint}{cost+sint}dt$. Calculer $I+J$ et $I-J$ et déduire I et J

3- Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 t\, dt$ par linéarisation de $\sin^4 t$

Sujet 5:

1. Soit : $I_n = \displaystyle\int_1^2 x^n \sqrt[5]{x-1}\,dx \quad (n \in \mathbb{N})$

   Calculer I_0 et I_1 puis calculer I_n en fonction de n
2. Soit : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx \quad (n \in \mathbb{N})$

Calculer I_0 et I_1 puis calculer I_n en fonction de n

Sujet 6:

1- En utilisant les formules d'Euler, Montrer que $\sin(p)-\sin(q)=2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

2- Soit $g_n(t)=\frac{\sin(2n+1)t}{sint}$ et $g_n(0)=2n+1$. On pose $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{sint}dt$

i. Vérifier que g_n est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

ii. Calculer I_0 et I_1

iii. Montrer que la suite (I_n) est constante et déterminer sa valeur

3- Soit $f_n(t)=\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}$ *et* $f(0)=n^2$. On pose $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt$.

a) Vérifier que f_n est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

b) Montrer que la suite (J_n) est arithmétique et calculer la limite de la suite (J_n)

Sujet 7:

I. Soit $f(x)=\frac{arctgx}{x}$ pour $x>0$.

Montrer que f admet à droite en 0 un prolongement par continuité à déterminer.

Dans toute la suite, on prendra $f(0)=1$

II. Soit la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $G(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ et $G(0)=1$

1. Montrer que : $\exists u_x\in]0,x[.\quad G(x)=\frac{arctg\,u_x}{u_x}$

2. Montrer que G est continue en 0

III. Montrer que G est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée

Sujet 8:

Soit f continue sur $[0,1]$ avec $\int_0^1 f(t)dt=0$. Soit g définie sur $[0,1]$ par : $g(x)=e^{-x}\int_0^x f(t)dt$

Montrer que : $\exists c\in]0,1[.\quad \int_0^c f(t)dt=f(c)$

Sujet 9:

Soit f dérivable et non constante sur $[0,1]$ et à valeurs positives avec $f(0)=0$

Soit g définie sur $[0,1]$ par : $g(x)=(1-x)\int_0^x f(t)dt$

1. Montrer que : $\exists c\in]0,1[.\quad g'(c)=0$

2. On pose $h(x)=-\int_0^x f(t)dt+(1-x)f(x)$.

Vérifier que $h(x)=g'(x)$ et montrer que : $\exists d\in]0,1[.\quad f'(d)>2f(d)$

Sujet 10:

On cherche toutes les fonctions f continue sur IR telles que : $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1 - f(x)$

1. Calculer $f(0)$
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}. \quad -x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x t f(t)\,dt + 1 = f(x)$
3. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée
4. Montrer que f est deux fois dérivable et calculer sa dérivée seconde
5. Déterminer les fonctions f

Sujet 11:

On considère la fonction $g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt$

1- Déterminer le domaine de définition de g et calculer $g(0)$

2- Montrer que g est continue sur $[0,+\infty[$

3- a) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x > 0. \quad g'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{x}}$.

b) Déduire les variations de g sur $]0,+\infty[$

4- a) Montrer que : $\forall x \geq 0. \quad e^x \geq x$

b) Montrer que $g'(x) \geq \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ et déduire que $g(x) \geq \dfrac{1}{3}x\sqrt{x}$ pour tout $x \geq 0$

c) En déduire la branche infinie de ζ_f au voisinage de $+\infty$

5- Montrer que ζ_f admet un point d'inflexion

Sujet 12:

1- Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y'' - y' + y = 0$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$

2- On considère la suite définie par : $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx \quad (n \in \mathbb{N})$

a) Calculer u_0

b) Calculer u_n en fonction de n et déduire $\lim u_n$

3- On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k \quad (n \in \mathbb{N})$

- Montrer que : $S_n = \int_0^{(n+1)\pi} f(x)\,dx$
- Déduire S_n en fonction de n puis calculer $\lim S_n$

Sujet 13:

1- Par des intégrations par parties, successives, calculer $\int_0^1 (t^2+t+1)e^t\,dt$

2- On pose $I=\int_0^1 \sin(2t)e^t\,dt$. Calculer I en procédant par une intégration par parties appropriées

3- Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$. Déterminer la relation liant I_{n+1} et I_n

Sujet 14:

Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$

1. Calculer I_0
2. Calculer I_1 par une intégration par partie
3. Montrer que : $\forall n\in\in.\quad (2n+5)I_{n+1}=(2n+2)I_n$

Sujet 15:

1. Calculer les intégrales suivantes avec les changements de variables proposés :

$I=\int_0^1 \frac{e^{2t}+1}{e^t+1}dt \quad (x=e^t)$ et $K=\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx \quad (t=\sqrt[6]{x})$ et $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgx)\,dx \quad \left(t=\frac{\pi}{4}-x\right)$

2. Soit : $I=\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{cost}{1+e^{2t}}dt$

   a) A l'aide du changement de variable $x=-t$, Montrer que : $I=\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{2t}cost}{1+e^{2t}}dt$

   b) Déduire que : $I=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Soient $I=\int_{-1}^{1} arctg(e^x)\,dx$ et $J=\int_{-1}^{1} arctg(e^{-x})\,dx$

   a) Montrer par un changement de variable adéquat que $I=J$

   b) Calculer $I+J$ et déduire I et J

Sujet 16:

Soit une fonction f continue sur l'intervalle $[a,b]$,

1. a) Montrer que la fonction g définie par $g(t)=f(a+b-t)$ est continue sur $[a,b]$

   b) Montrer que : $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$

1. Soit une fonction f continue sur l'intervalle $[a,b]$,

   a) Montrer que la fonction g définie par $g(t)=f(a+(b-a)t)$ est continue sur $[0,1]$

   b) Montrer que : $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)\,dx$

Sujet 17:

f est une fonction continue sur IR. Soit $g(x)=\int_a^b f(x+t)\cos(t)\,dt$

1. Par le changement de variable $u=x+t$, transformer $g(x)$
2. Montrer que g est dérivables et calculer sa dérivée

Sujet 18:

1. On pose : $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$ avec $x\in I=[2,+\infty[$ et on pose : $u_n=\int_n^{n+1} f(x)\,dx \quad (n\geq 2)$
   a) Vérifier que f est décroissante sur I.
   b) Déduire que $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$ et calculer $\lim(u_n)$
2. Vérifier que : $\forall t\geq 0. \quad 1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$
3. Déduire que : $\forall x\geq 0. \quad x-\frac{1}{2}x^2\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$

Sujet 19:

1- Soit la suite $I_n=\int_0^1 t^n e^t\,dt \quad n\in\mathbb{N}$

- Montrer que : $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ (Faire une intégration par partie)
- Montrer que (I_n) est décroissante et positif. Déduire que (I_n) est convergente.

2- Montrer que : $\frac{1}{n+1}\leq I_n\leq\frac{e}{n+1}$ et déduire que $\lim I_n=0$

Sujet 20:

On considère la suite $u_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}$. Soit la suite $I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-t)^n e^t\,dt \quad (n\in\mathbb{N})$

1. Montrer, par partie, que : $\forall n\in\mathbb{N}. \quad I_{n+1}-I_n=\frac{-1}{(n+1)!}$. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}. \quad I_n=e-\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}$
2. Montrer que $0\leq I_n\leq\frac{e}{n!}$ et déduire $\lim I_n$
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}$

Sujet 21:

Pour tout naturel $n\geq 1$ on pose : $I_n=\frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1(1-t)^n e^{\frac{t}{2}}\,dt$

1- A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1

2- Démontrer que pour tout naturel $n\geq 1$ on a : $I_{n+1}-I_n=\frac{-1}{2^{n+1}(n+1)!}$

3- En déduire par récurrence que : $\forall n\geq 1$ on a : $\sqrt{e}=1+\frac{1}{2\times 1!}+\frac{1}{2^2\times 2!}+\ldots+\frac{1}{2^n\times n!}+I_n$

4- Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que : $0\leq I_n\leq\frac{A}{2^n\times n!}$

5- Calculer $\lim\left(1+\frac{1}{2\times 1!}+\frac{1}{2^2\times 2!}+\ldots+\frac{1}{2^n\times n!}\right)$

Sujet 22:

On considère la suite donnée par : $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} \qquad (n\geq 1)$

1. Vérifier que : $\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\int_0^1(-t)^{k-1}dt$ pour tout $k\geq 1$. En déduire que : $S_n=\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{k=n}(-t)^{k-1}\right)dt$
2. Calculer $\sum_{k=1}^{k=n}(-t)^{k-1}$ en fonction de t et n . Déduire que $S_n=\int_0^1\frac{1}{1+t}dt-(-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt$
3. Montrer que $0\leq\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt\leq\frac{1}{n+1}$ et déduire $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt$
4. Montrer à partir de ce qui précède que : $\lim S_n=\ln 2$

Sujet 23:

1. a) Montrer que : $\exists c\in]1,\pi[.\qquad \int_1^\pi\ln(\sqrt{x})dx=\left(\frac{\pi-1}{2}\right)\ln(c)$

   b) Déduire que : $0\leq\int_1^\pi\ln(\sqrt{x})dx\leq\left(\frac{\pi-1}{2}\right)Ln\pi$
2. On considère la suite : $u_n=\int_0^a\frac{f(x)}{1+nx}dx \qquad n\in\mathbb{N} \quad et \quad a>0$ avec f continue sur $[0,a]$

   En utilisant le théorème de la moyenne, montrer que $\lim(u_n)=0$

Sujet 24:

Calculer les limites des sommes suivantes en utilisant des intégrales appropriées

a) $u_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{k}$ b) $v_n=\frac{1}{n}+\frac{n}{n^2+1}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}$

c) $w_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$ d) $v_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6}(1+\frac{k}{n})\right)\ \cos\left(\frac{\pi}{6}(1+\frac{k}{n})\right)}$

e) $u_n(x)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{n}{n^2+k^2x^2}$

Sujet 25:

1. Par une intégration par partie, calculer $\int_0^1\ln(1+x^2)dx$
2. On considère la suite : $\forall n\geq 1. \qquad u_n=\frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{k=n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$

   a) Calculer u_1 et u_2

   b) Montrer que : $\forall n\geq 1. \qquad \ln(u_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$

   c) Calculer $\lim(u_n)$

Sujet 26:

Pour tout $n\geq 1$, on pose : $S_n=\left(\frac{(2n)!}{n^n\times n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

4- Calculer S_1 et S_2

5- a) Montrer que : $\forall n\geq 1.\quad \ln(S_n)=\frac{1}{n}\ln\frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots\ldots(n+n)}{n^n}$

b) Déduire alors que : $\forall n\geq 1.\quad \ln(S_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

c) Déduire la limite $\lim(\ln S_n)$ et calculer $\lim(S_n)$

Sujet 27:

On considère la suite $S_n=\sum_{k=n+1}^{k=2n}\frac{1}{k}$

1. Montrer que $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$
2. Utiliser une intégrale appropriée et montrer que $\lim S_n=\ln 2$

Sujet 28:

Soit $S_n=\sum_{k=1}^{k=2n}\frac{k}{n^2+k^2}$

1. Vérifier que : $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=2n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. S'agit-il d'une somme de Riemann ?
2. On pose $u_n=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\frac{2k}{n}}{1+\left(\frac{2k}{n}\right)^2}$

a) Vérifier que $u_{2n}=S_n$ et que $u_n=\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\frac{k}{n}}{1+4\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. S'agit-il d'une somme de Riemann ?

b) Calculer $\lim u_n$ et déduire $\lim S_n$

Sujet 29:

1. Calculer le volume d'une boule de rayon r
2. Considérons le segment $[AB]$ avec $A(1,1)$ et $B(1,3)$

Soit Δ le domaine limité par $[AB]$ et les droites $(y=0)$ et $(x=1)$ et $(x=2)$

Soit ∇ le domaine limité par $[AB]$ et les droites $(y=1)$ et $(y=3)$ et $(x=0)$

Comparer les volumes des solides engendrés par une rotation de Δ autour de (Ox) et de ∇ autour de (Oy)

Sujet 1:

On considère la fonction définie par : $F(x)=\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$ et $F(0)=\ln(2)$

1. Montrer que F est définie sur IR
2. a) Encadrer e^t et montrer que F est continue en 0 à droite

   b) Montrer de même que F est continue en 0 à gauche. En déduire que F est continue en 0
3. Déterminer les branches infinies de la courbe de F
4. a) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ et que : $\forall x\neq 0.\quad F'(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{x}$

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}F'(x)$
5. a) Montrer que : $\forall x\neq 0.\ \exists c_x\in IR.\quad \frac{F(x)-\ln 2}{x}=F'(c_x)$

   b) Montrer que F est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente à sa courbe au point $O(0,0)$
6. Poser le tableau des variations de F et représenter sa courbe représentative

Sujet 2:

I. Le plan est rapporté à R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$. Soit $f(x)=3x^2+1-2x^2\ln(x)$ avec $x>0$

1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ces résultats
2. Etudier les variations de f et déterminer son signe
3. Montrer que : $\exists!\,a\in]4,5[.\quad f(a)=0$
4. Représenter graphiquement la courbe de f dans $(O,\vec{i},\vec{j})$
5. Calculer l'aire géométrique de la surface (S) limité par l'axe des abscisses et les droites $(x=0)$ et $(x=e)$ et la courbe de f et la courbe d'équation $y=3x^2+1$
6. Calculer le volume du solide de révolution obtenu par une rotation complète de (S) autour de l'axe (Ox)

II. On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{-1+\ln(x)}{1+x^2}$

7. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$
8. Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[.\quad g'(x)=\frac{f(x)}{x(1+x^2)^2}$ et déduire les variations de g
9. Vérifier que $g(a)=\frac{1}{a^2}$ et donner un encadrement de $g(a)$
10. Représenter graphiquement la courbe de g

III. On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $G(x)=\int_1^{\frac{1}{x}} g(t)\,dt$

11. a) Montrer que G est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x\in]0,+\infty[.\quad G'(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{1+x^2}$

   b) Déduire les variations de G sur $]0,+\infty[$

   c) Déduire aussi que : $G(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{1+\ln(t)}{1+t^2}\,dt$

12. Par un changement de variable adéquat, montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[.\quad G(x)=G\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{\pi}{2}+2\arctan(x)$

Sujet 3:

On considère la fonction définie sur $\left]\dfrac{-\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\ln(1+\tan(x))$

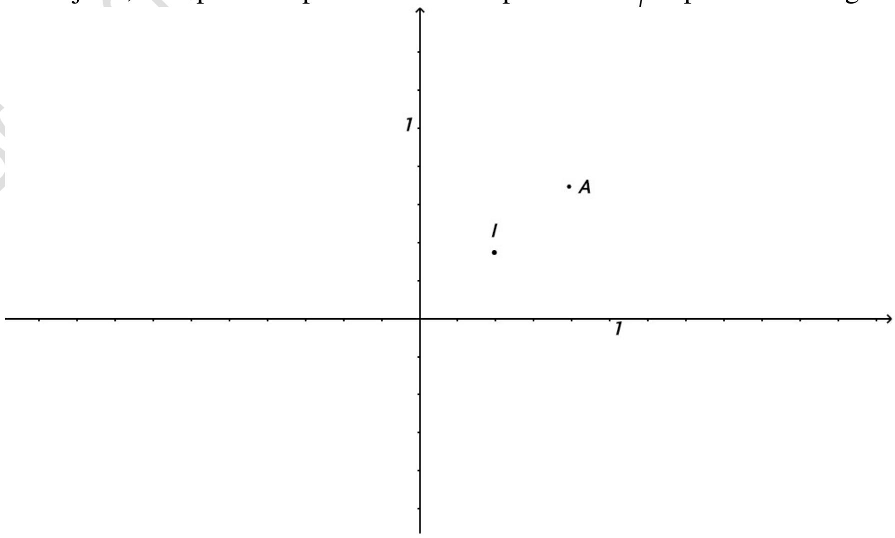
Soit C_f la courbe de f dans un RON du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$

Pour toute fin utile, nous rappelons la transformation trigonométrique : $\tan(2x)=\dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

1. Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\frac{-\pi}{4}\\ x>\frac{-\pi}{4}}} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x)$
2. Calculer la dérivée de f sur $\left]\dfrac{-\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et dresser son tableau des variations
3. Former les équations des tangentes à C_f aux points $O(0,0)$ et I et A
4. a) Montrer que : $\exists!\,c\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[.\,f(c)=c$ (pour la suite du sujet, on prendra $c\cong 1{,}12$)

   b) Déduire le signe de $f(x)-x$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

   c) Vérifier $f([0,c])=[0,c]$
5. Dans le schéma ci-joint, on a placé les points I et A. Représenter C_f et préciser la tangente de



6- Soient S_1 le domaine du plan limité par C_f et les droites (OI) et $(x=0)$ et $\left(x=\frac{\pi}{8}\right)$.

Soit S_2 le domaine du plan limité par C_f et les droites (OA) et $\left(x=\frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(x=\frac{\pi}{8}\right)$.

a) Justifier que les surfaces S_1 et S_2 ont la même aire

b) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$ par le changement de variable $t=\frac{\pi}{4}-x$

c) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)\,dx=\frac{\pi}{8}\ln 2-\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$

d) Déduire les aires de S_1 et de S_2 en cm^2

7- a) Montrer que f est bijective de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ vers $]0,+\infty[$

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$

c) Donner les expressions de $f^{-1}(x)$ et de $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$

d) Calculer $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+\left(e^x-1\right)^2}\,dx$

8- On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0\in]0,c[$ et $v_0\in]0,c[$ et pour tout $n\in\in, u_{n+1}=f(u_n)$ et $v_{n+1}=f^{-1}(v_n)$

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée et déduire qu'elle est convergente

b) Montrer que la suite (v_n) est croissante et majorée et déduire qu'elle est convergente

c) Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes ?

9- Soit la suite définie par $P_n=\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(\sqrt[n]{1+\tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)}\right)^{\frac{\pi}{4}}$ pour tout n entier naturel non nul

a) Calculer P_1 et P_2

b) Donner sous forme d'une somme, et en fonction de n, l'expression de S_n avec $S_n=\ln(P_n)$

c) Calculer $\lim(S_n)$ et déduire $\lim(P_n)$

Sujet 4:

Partie A : On pose $F(x)=\int_0^x Arctg(t)dt$

1- Par une intégration par partie, montrer que : $F(x)=xArctg(x)-\ln\sqrt{1+x^2}$

2- Par changement de variable d'abord, montrer que: $F(x)=xArctg(x)+\ln(\cos(Arctg(x)))$

3- Déduire $\cos(Arctg(x))$ en fonction de x

4- a) Vérifier que F est paire puis déterminer la branche infinie de sa courbe au voisinage de $+\infty$

b) Poser la TV de F puis représenter graphiquement sa courbe

c) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe de F et les droites $y=0$ et $x=0$ et $x=1$

Partie B : Soit $\varphi(t)=t+Arctg(t)(t\in IR)$

1. Etudier φ et représenter graphiquement C_φ dans repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (Unité $2\,cm$)

2. a- Calculer la surface du domaine $\Delta=\{M(x,y)\in P\, 0\leq x\leq 1 et\, 0\leq y\leq\varphi(t)\}$

b- Calculer le volume du solide (S)obtenu par une rotation complète de Δ autour de $(O,\vec{j})$

Partie C : Soit $G(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\varphi(t)}dt$ avec $x>0$

1. Déterminer D_G et montrer que G est impaire
2. a- Justifier la dérivabilité de G sur $]0,+\infty[$et calculer $G^{'}(x)$ pour tout $x>0$
3. b- Etudier la monotonie de G sur $]0,+\infty[$
4. a- Montrer que : $\forall t>0\ \frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}<\frac{1}{\varphi(t)}<\frac{1}{t}$

b- Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)$

5. sa- Vérifier que $\forall u\in IR\ 1-u^2<\frac{1}{1+u^2}<1$. Déduire que : $\forall t>0\ t-\frac{1}{3}t^3<Arctg(t)<t$

b- Déduire que : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{\arctan(t)-t}{t^2}\right)$ et que : $\forall t\in]0,1]$. $\frac{1}{2t}<\frac{1}{\varphi(t)}<\frac{3}{t(6-t^2)}$

c- Vérifier que : $\forall t\in]0,1]$. $\frac{1}{6-t^2}<\frac{1+t^2}{6}$

d- Déduire que : $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right]$. $\frac{1}{2}\ln2\leq G(x)\leq\frac{1}{2}\ln2+\frac{3}{4}x^2$

e- Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}G(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}G(x)$. Interpréter ces résultats

6. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{G(x)-\frac{1}{2}\ln2}{x}\right)$
7. Représenter graphiquement C_G

Sujet 5:

I. Partie 1 :

On considère la fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$

Soit C_f la courbe de f dans un RON du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$

1. a) Déterminer les branches infinies de C_f

   b) Poser le tableau des variations de f

   c) Etudier la position de C_f par rapport à la droite $(y=x)$puis représenter C_f

2. a) Montrer que f est bijective de IR vers un intervalle J à déterminer

   b) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ et représenter la courbe de f^{-1}

3. a) Calculer $\int_0^1 f(t)\,dt$

   b) Déduire l'aire du domaine (Δ) du plan limité par C_f et les droites $(x=0)$ et $(x=1)$ et $(y=0)$

4. a) Déterminer a et b et c et d tels que : $\dfrac{t^3}{(t+1)^2}=at+b+\dfrac{c}{t+1}+\dfrac{d}{(1+t)^2}$

   b) Calculer le volume du solide de révolution (∇) obtenu par une rotation complète de (Δ) autour de (Ox)

II. Partie 2 :

5. Pour tout $n>0$ entier naturel et pour tout x nombre réel négatif, on pose $F_n(x)=\int_x^0 \dfrac{e^{nt}}{e^t+1}dt$

   a) Calculer $F_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x)$

   b) Calculer $F_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F_2(x)$

6. Montrer que : $\forall x<0. \forall n\geq 1. \quad F_{n+1}(x)+F_n(x)=\dfrac{1-e^{nx}}{n}$

7. Montrer par récurrence que $F_n(x)$ admet une limite R_n quand x tend vers $-\infty$

8. a) Montrer que : $\forall t<0. \quad 2e^t\leq e^t+1\leq 2$

   b) Déduire que : $\forall x<0. \forall n>1. \quad \dfrac{1-e^{nx}}{2n}\leq F_n(x)\leq\dfrac{1-e^{(n-1)x}}{2(n-1)}$

   c) Déduire que : $\forall n>1. \quad \dfrac{1}{2n}\leq R_n\leq\dfrac{1}{2(n-1)}$

   d) Calculer $limR_n$

Sujet 6:

On considère la fonction définie par $g(t)=\dfrac{1}{\ln(t)}$. On pose $I=]0,1[$ et $J=]1,+\infty[$

Soit f définie pour tout $x>0$ par : $f(x)=\int_x^{x^2} g(t)dt$ et $f(0)=0$ et $f(1)=\ln 2$

Soit C_f la courbe de f dans un RON du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Déterminer le signe de f sur chacun des intervalles I et J
2. a) Montrer que f est dérivable sur I et sur J, puis calculer sa dérivée sur ces deux intervalles

   b) Etudier les variations de f sur I et sur J
3. a) Encadrer convenablement $g(t)$ et montrer que : $\forall x \in I.\quad \dfrac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \dfrac{x(x-1)}{\ln(x)}$

   b) Déduire que f est continue à droite en 0

   c) Déduire aussi que f est dérivable à droite en 0 et préciser $f'_d(0)$
4. Encadrer convenablement $g(t)$ sur J et déduire la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$
5. a) Montrer que : $\forall x \in J.\quad \int_x^{x^2} \dfrac{1}{tLn(t)}dt = \ln 2$

   b) Montrer que : $\forall x \in J.\quad xLn2 \leq f(x) \leq x^2 \ln 2$ puis déduire que f est continue à droite en 1

   (On peut remarquer que $f(x)=\int_x^{x^2} t \times \dfrac{1}{tLn(t)}dt$)

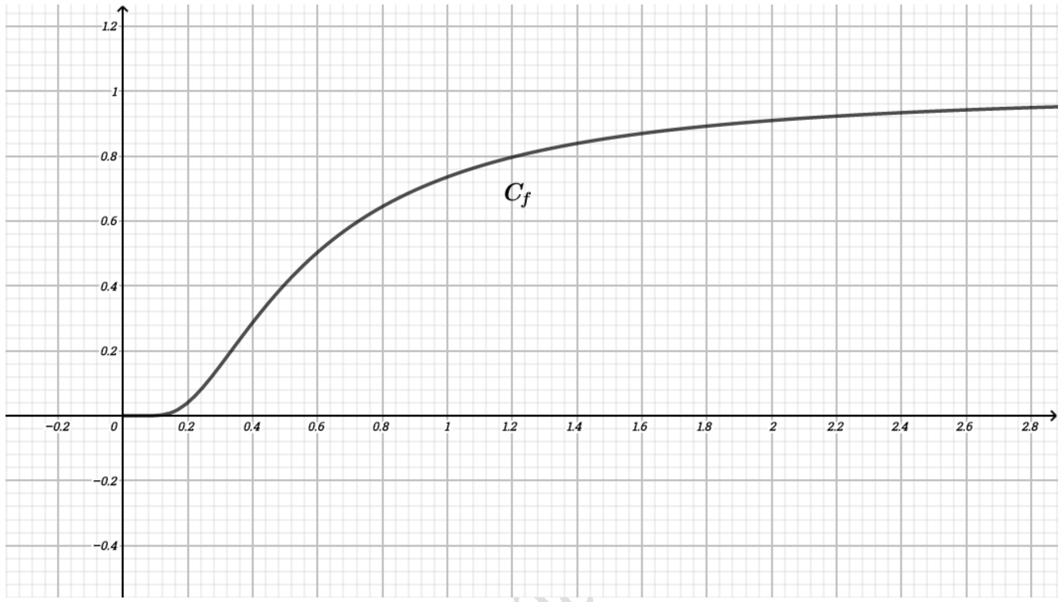
   c) Montrer de la même manière que f est continue à gauche en 1
6. En utilisant le théorème des accroissements finis appliqué à f sur l'intervalle de bornes x et 1, montrer que f est dérivable en 1.
7. Poser le tableau des variations de f puis représenter graphiquement la courbe C_f

Sujet 7: (inspiré du BAC-S.Normale 2017 --- Attention : Vérifier si les questions sont correctes !!!)

On considère la fonction définie pour tout $x>0$ par $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}$ et $f(0)=0$

On considère la fonction définie pour tout $x>0$ par $F(x)=\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$

La courbe C_f de f dans un RON du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$ est représentée ci-dessous



2. Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$

3. a) En utilisant une intégration par partie, montrer que :

$$\forall x>0. \qquad \int_x^1 e^{\frac{-1}{t}}\,dt=e^{-1}-x\,e^{\frac{-1}{x}}-\int_x^1 \frac{1}{t}e^{\frac{-1}{t}}\,dt$$

   b) Déterminer $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$ pour tout $x>0$

   c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=e^{-1}$

4. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par C_f et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$ et $y=0$

5. On considère la suite définie par : $\forall n\geq 0. \qquad u_n=F(n)-F(n+2)$

   a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n\geq 0$, il existe $v_n\in\,]n,n+2[$ tel que : $u_n=2\left(1+\dfrac{1}{v_n}\right)e^{\frac{-1}{v_n}}$

   b) Montrer que : $\forall n>0. \qquad 2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{n}}\leq u_n\leq 2\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)e^{\frac{-1}{n+2}}$

   c) Déduire $\lim u_n$

Sujet 8 : (Inspiré du Bac-S.Normale 2016)

On considère la fonction définie pour tout $x>0$ par $F(x)=\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt$

Soit C_F La courbe de F dans un RON du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. a) Etudier le signe de F sur IR^{+*}

   b) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ .Calculer sa dérivée et déduire qu'elle y'est strictement croissante

2. a) Par changement de variable $u=\sqrt{e^t-1}$, montrer que $\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt=2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2}$

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}F(x)$

   c) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\frac{F(x)+\frac{\pi}{2}}{x}\right)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

3. Montrer F est bijective de $]0,+\infty[$ vers un intervalle J à déterminer . Préciser, F^{-1}, la réciproque de F

4. a) Calculer la dérivée seconde de F sur $]0,+\infty[$ et déduire la concavité de C_F

   b) Représenter C_F et $C_{F^{-1}}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

5. On prend $G(x)=F^{-1}(x)$ $si\ x>0.$ et $G(\frac{-\pi}{2})=0$ Montrer que G est dérivable en $\frac{-\pi}{2}$ à droite et calculer $G'_d\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

Sujet 9 : (Inspiré du Bac-S.Rattrapage 2016)

Soit $n\geq 2$ un entier naturel. On considère la fonction définie sur $[n,+\infty[$par $g_n(x)=\int_{n}^{x}\frac{1}{Lnt}dt$

1. a) Montrer que g_n est dérivable sur $[n,+\infty[$ et calculer sa fonction dérivée

   b) Montrer que g_n est strictement croissante sur $[n,+\infty[$

2. a) Vérifier que : $\forall t\geq 0.\ \ln(1+t)\leq t$

   b) Montrer que : $\forall x\geq n.\ g_n(x)\geq \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}g_n(x)$

3. a) Montrer que $g_n(x)$ est une bijection de $[n,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$

   b) En déduire que : $\forall x\geq n.\exists!\, u_n\geq n.$ $\int_{n}^{u_n}\frac{1}{Lnt}dt=1$

4. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie dans la question 3-b)

   a) Montrer que : $\forall n\geq 2.$ $\int_{u_n}^{u_{n+1}}\frac{1}{Lnt}dt=\int_{n}^{n+1}\frac{1}{Lnt}dt$

   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante

   c) Déterminer $\lim u_n$

Sujet 10 : (Inspiré du Bac-S.Normale 2015)

1. Soit $f(x)=x\left(1+\ln^2(x)\right)$ pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$ et $f(0)=0$. Montrer que f est continue sur $\left[0,+\infty\right[$

2. Soit $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ définie sur $\left[0,+\infty\right[$

   a) Montrer que la fonction $H(x)=\frac{-1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2 Lnx$ est une primitive de la fonction $x\to xLnx$

   b) Montrer que : $\forall x>0.\quad \int_1^x t\ln^2 t\,dt=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\int_1^x t\,Lnt\,dt$

   c) Déduire que : $\forall x>0.\quad F(x)=\frac{-3}{4}+\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2 Lnx+\frac{1}{2}x^2\ln^2 x$

3. a) Montrer que F est continue sur $\left[0,+\infty\right[$

   b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$ et déduire $\int_0^1 f(t)\,dt$

Sujet 11 : (Inspiré du Bac-S.Normale 2015)

Soit $g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt$ définie sur $\left]0,+\infty\right[$ et $g(0)=\ln 2$

1. a) Montrer que : $\forall x>0.\forall t\in[x,2x].\quad e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x}$

   b) Montrer que : $\forall x>0.\quad e^{-2x}\ln 2\le g(x)\le e^{-x}\ln 2$

   c) Déduire que g est continue en 0 à droite

   d) Déterminer la branche infinie de la courbe de g au voisinage de $+\infty$

2. a) Montrer que g est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et calculer sa fonction dérivée

   b) Poser le tableau des variations de g

3. a) En utilisant TAF, montrer que : $\forall t>0.\quad -1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$

   b) Montrer que : $\forall x>0.\quad -1\le\frac{g(x)-\ln 2}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$

   c) Déduire que g est dérivable en 0 à droite

4. Soit C_g la courbe de g dans un RON du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$. Représenter C_g

Sujet 12 : (Inspiré du Bac-S.Rattrapage 2015)

Soit $g(x)=\int_x^{3x}\frac{cost}{t}dt$ définie sur $IR^{¿}$

4. Montrer que g est paire
5. Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée pour tout $x>0$
6. a) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_x^{3x}\frac{cost}{t}dt=\frac{\cos(3x)-3\cos(x)}{x}-\int_x^{3x}\frac{sint}{t^2}dt$

   b) Montrer que : $\forall x>0.$ $\left|\int_x^{3x}\frac{sint}{t^2}dt\right|\leq\frac{2}{3x}$ et déduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$
7. a) Vérifier que : $\forall t>0.$ $0\leq 1-cost\leq t$

   b) Déduire que : $\forall x>0.$ $0\leq\int_x^{3x}\frac{1-cost}{t}dt\leq 2x$

   c) Montrer que : $\forall x>0.$ $g(x)-\ln 3=\int_x^{3x}\frac{cost-1}{t}dt$ et déduire $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$

Sujet 13 : (Inspiré du Bac-S.Rattrapage 2015)

Soit $n\geq 1$ un entier naturel. On considère la fonction définie sur IRpar $f_n(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$

Soit C_{f_n} La courbe de f_n dans un RON du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$

4. Déterminer les branches infinies de C_{f_n}
5. Montrer que f_n est dérivable sur IR et calculer sa dérivée, puis poser son tableau des variations
6. a) Montrer que le point $C\left(n,\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de f_n

   b) Représenter graphiquement C_{f_n}

   c) Calculer l'aire du domaine plan limité par C_{f_n} et les droites $x=0$ et $y=0$ et $x=1$
7. a) Montrer que l'équation $f_n(x)=x$ admet une solution unique u_n dans $]0,n[$

   b) Montrer que : $\forall n\geq 1.\forall x\in]0,n[.$ $f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$

   c) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante et qu'elle est convergente

   d) Calculer $\lim u_n$

Sujet 14 : (Inspiré du Bac-S.Normale 2014)

3. On considère la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}$ pour tout $x>0$ et $g(0)=0$

   Montrer que g est continue sur $[0,+\infty[$

4. On pose $L(x)=\int_x^1 g(t)\,dt$ pour tout $x\geq 0$

   a) Montrer que L est continue sur $[0,+\infty[$

   b) Calculer $L(x)$ pour tout $x>0$

   c) Calculer $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} L(x)$ et déduire la valeur de $L(0)$

5. Pour tout $n\geq 1$, on pose $u_n=\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$. Montrer que (u_n) est convergente. Calculer sa limite

Sujet 15 : (Inspiré du Bac-S.Rattrapage 2014)

On considère la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2}\,dt$

1. Soit k la fonction définie sur IRpar : $k(x)=\int_1^x e^{-t^2}\,dt$

   a) Vérifier que pour tout $x\geq 0$, on a : $g(x)=-k(\sqrt{x})$

   b) Montrer que g est continue sur $[0,+\infty[$ et est dérivable sur $]0,+\infty[$

   b) Calculer $g'(x)$ pour tout $x>0$et déduire que g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

2. a) Montrer que pour tout $x\geq 0$, on a : $\frac{g(x)-g(0)}{x}\leq\frac{-1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$.

   b) Déduire que g n'est pas dérivable en 0 à droite et interpréter graphiquement le résultat obtenu

Sujet 16 : (Inspiré du Bac-S.Rattrapage 2014)

Partie 1 : La fonction f est définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{-\ln(x)}{\sqrt{x}}$. C_f est sa courbe représentative

1. Calculer les limites de f aux bornes de $]0,+\infty[$ et déterminer les branches infinies de C_f

2. Montrer que $f'(x)=\frac{\ln(x)-2}{2x\sqrt{x}}$ pour tout x de $]0,+\infty[$ puis poser le tableau des variations de f

3. Représenter C_f dans $(O,\vec{i},\vec{j})$. (Utiliser le schéma ci-joint)

Partie 2 : La fonction F est définie par $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$ si $x>0$ et $F(0)=4$. Soit C_F sa courbe représentative

4. Calculer $F(1)$ puis étudier le signe de F sur $[0,+\infty[$

5. a) Montrer, par une intégration par partie, que pour tout $x>0$, on a : $\int_x^1 \frac{-\ln(t)}{\sqrt{t}}dt=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln(x)$

b) Retrouver ce résultat en effectuant le changement de variable $u=\sqrt{t}$

c) Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$

6. a) Calculer l'aire du domaine plan Δ limité par C_f et les droites d'équations $y=0$ et $x=1$ et $x=e^2$

b) Calculer le volume du solide de rotation obtenu par une rotation complète de Δ autour de l'axe $(O,\vec{i})$

7. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$. En déduire la branche infinie de C_F au voisinage de $+\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(\dfrac{F(x)-4}{x}\right)$ et déduire la nature de la demi-tangente à C_F à droite au point $O(0,4)$

c) Justifier la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$ et Montrer que : $\forall x>0.F'(x)=\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

d) Montrer que $B(e^2,4)$ est un point d'inflexion de C_F

e) Poser le tableau des variations de F puis représenter C_F (On donne $e^2\approx7,4$)

Partie 3 : Pour tout $n\geq1$, entier naturel, on pose $u_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

8. a) Montrer que : $\forall n\geq2.\forall 1\leq k\leq n.$ $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

b) Déduire que $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt\leq u_n\leq\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt$ et que $\lim u_n=4$

Sujet 17:

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$. On pose $f(t)=x^2-2x\cos t+1$ et $F(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$

1. a) Montrer que $x^2-2x\cos t+1>0$ pour tout $t\in[0,2\pi]$
   b) Déduire que la fonction F est définie sur $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$
2. a) Vérifier que $x^2-2x\cos t+1=(x-e^{it})(x-e^{-it})$
   b) Vérifier que $\overline{x-e^{-it}}=x-e^{it}$
3. a) Montrer que $\prod\limits_{k=0}^{k=n-1}(x-e^{2ik\pi/n})=x^n-1$

   b) Calculer, de même, en fonction de x et de n le produit $\prod\limits_{k=0}^{k=n-1}(x-e^{-2ik\pi/n})$

   c) Déduire, *en fonction de* x *et de* n *le produit* $\prod\limits_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$

4. On pose $S_n(x)=\dfrac{2\pi}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n} f\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$

   a) Montrer que *:* $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$. $S_n(x)=\dfrac{4\pi}{n}\ln(|x^n-1|)$

   b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$

   c) Calculer $F(x)$ en fonction de x