Sujet 1 :

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{3x^2+6} & ; \quad x\geq 1 \\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & ; \quad x<1 \, et \, x\neq 0 \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de f et calculer $f(1)$ et $f(-1)$
2. Montrer que f est continue en -1
3. Montrer que f est continue en 1 à droite
4. Etudier la continuité de f en 1 à gauche. f est-elle continue en 1 ?
5. Montrer que f admet, en 0, un prolongement par continuité à déterminer

Sujet 2 :

On considère la fonction f définie sur IR^* par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(2x-3)^3+\lambda}{x^2-1} & ; \quad x>1 \\ f(x)=\dfrac{\mu x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{x^2+1} & ; \quad x\leq 1 \end{cases}$

1- Calculer suivant les valeurs de λ les limites de f en 1 à droite.

2- Calculer λ et μ pour que f soit continue en 1

Sujet 3 :

Soit la suite de fonctions u_n définie sur $IR-\{0\}$ par : $u_n(x)=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$ $\quad (n\in\mathbb{N})$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} u_2(x)$
2. Montrer que la fonction u_n admet en 0 un prolongement par continuité $\overline{u_n}$ à déterminer
3. Calculer, suivant les valeurs de x, la limite de la suite $(u_n(x))$

- Soit la fonction f_n définie sur $IR-\{0\}$ par : $f_n(x)=\dfrac{1}{x^2}\left[(1+x)^n-1-nx\right]$ $\quad (n\in\mathbb{N}^*-\{1\})$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$

2- Montrer que f_n admet en 0 un prolongement par continuité à déterminer

Sujet 4 :

Soit : $f_n(x)=E(x)+(x-E(x))^n$ $\quad (n\in\mathbb{N}^*)$

1. Calculer $f_n(0{,}04)$ puis calculer $f_n(p)$ avec p entier relatif
2. Montrer que la fonction f_n est continue sur $\mathbb{Z}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
3. Montrer que la fonction f_n est continue sur IR pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
4. Calculer en fonction de x la limite de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$

Sujet 5 :

Soit : $f_n(x)=\dfrac{(1-sn(x))(1-\sin^2(x))\ldots\ldots..(1-\sin^n(x))}{\cos^{2n}(x)}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\left]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f_2(x)$
2. Calculer en fonction de n la limite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f_n(x)$
3. Montrer que la fonction f_n admet en 0 un prolongement par continuité $\overline{f_n}$ à déterminer
4. Calculer la limite de la suite $\left(\overline{f_n}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Sujet 6 :

Soit $f(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)}$

1. Montrer que f est définie sur IR
2. Montrer rigoureusement que f est continue sur IR

Sujet 7:

Soit $f(x)=\dfrac{2}{3-x}$ et $I=[1,2]$

1. Montrer que f est strictement croissante sur I
2. Déterminer $f(I)$
3. Déterminer les points fixes de f appartenant I

Soit la suite $u_{n+1}=\dfrac{2}{3-u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $u_0=\dfrac{3}{2}$

1. Calculer u_1
2. Montrer que: $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 1\le u_n\le 2$
3. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante
4. Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite

Soit $v_n=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}u_n\right)}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}u_n\right)}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\lim(v_n)$

Sujet 8:

Soient les fonctions $\begin{cases} f(x)=x+1 & ; \quad x<0 \\ f(x)=sin(\sqrt{x}) & ; \quad x\ge 0\end{cases}$ et $g(x)=(1-x)x$

Continuité de f et de g

1. Vérifier que f est continue sur $]-\infty,0[$
2. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$
3. Montrer que f est discontinue en 0
4. Donner le domaine de continuité de g

Continuité de gof

5. Montrer que gof est continue sur $]-\infty,0[$
6. Montrer que gof est continue sur $[0,+\infty[$
7. Déterminer gof. gof est-elle continue en 0 ? Conclusion ?

Images d'intervalles

8. Déterminer l'image par f de $]-\infty,0[$
9. Déterminer l'image par f de $[0,+\infty[$
10. Déterminer l'image par gof de $]-\infty,0[$
11. Déterminer l'image par gof de $[0,+\infty[$

Une équation subtile :

12. Montrer que l'équation $gof(x)=\frac{1}{8}$ admet au moins deux solutions de signes opposés dans IR

Sujet 9:

Soit : $f(x)=4x^3+3x^2-1$

1. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique c dans $]0,1[$
2. Donner un encadrement de cette solution, d'amplitude moindre que 0.25
3. Donner le signe de f sur $]0,1[$
4. Vérifier que c est l'unique solution de $f(x)=0$ dans $\mathbb{R}$, puis donner le signe de f sur
5. Montrer que f admet un point fixe dans $]0,1[$

Sujet 10:

Soit $f:[a,b]\to[m,M]$ une fonction continue, avec $[m,M]C[a,b]$

1. Montrer que : $\exists\alpha\in[a,b]. \quad f(\alpha)=\alpha$
2. Montrer que si f est décroissante, alors le point fixe α est unique

Sujet 11:

1. Soit f continue sur l'intervalle $[a,b]$. Soit $(x_i)_{0\le i\le n-1}\in[a,b]^n \qquad (n\in\mathbb{N}^*)$

   Montrer que : $\exists c\in[a,b]. \quad f(c)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_k)$
2. Soit g continue et non constante sur $[0,1]$ avec $g(0)=g(1)$

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit g_n la fonction définie sur $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ par : $g_n(x)=g\left(x+\frac{1}{n}\right)-g(x)$

b) Montrer que g n'est pas monotone sur $[0,1]$

c) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*.\quad \sum_{k=0}^{k=n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right)=0$

3. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*.\quad \exists c_n\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right].\quad g(c_n)=g(c_n+\frac{1}{n})$

4. Application : Soit la fonction $h(x)=x(1-x)$. Expliciter c_n en fonction de n puis calculer $\lim\ (c_n)$

Sujet 12:

Soit f continue sur IR

1. Montrer que tout point fixe de f est aussi un point fixe de fof

2. On suppose que fof admet dans $\mathbb{R}$ un point fixe c. On pose $d=f(c)$

a) Montrer que $f(d)=c$

b) Montrer que f admet un point fixe dans l'intervalle $[min(c,d);max(c,d)]$

Sujet 13:

Soit $f_n(x)=x^n+x-1$ définies sur IR avec $n\in\mathbb{N}^*$

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*.\quad \exists! u_n\in]0,1[.\quad f_n(u_n)=0$
2. Calculer u_1 et u_2
3. Montrer que : $\forall x\in]0,1[.\quad f_{n+1}(x)\ \le\ f_n(x)$. Déduire que la suite (u_n) est croissante
4. Déduire que la suite (u_n) est convergente
5. On pose $\lim(u_n)=l$. Montrer que $0<l\le 1$ puis montrer, par l'absurde, que $\lim(u_n)=1$

Sujet 14:

Soit f continue sur IR avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

On pose: $g(x)=fo\tan(x)$ avec $x\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

1. Vérifier que g est continue sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} g(x)$
3. Montrer que : $\exists c\in IR.\quad f(c)=0$