Sujet 1

Soient A et B trois parties d'un ensemble non vide E.

1. Montrer que : $card(A\cap B)=cardA-card(A\setminus B)$. Etudier le cas particulier ACB
2. Montrer que : $card(A\Delta B)=cardA+cardB-2\,card(A\cap B)$. Etudier le cas de parties disjointes
3. Soient A et B et C trois parties d'un ensemble non vide E. Montrer que :
   $card(A\cup B\cup C)=cardA+cardB+cardC-card(A\cap B)-card(A\cap C)-card(B\cap C)+card(A\cap B\cap C)$
4. Soient E et F et G trois ensembles non vides.
   a) Rappeler l'expression de $card(E\times F)$ en fonction de $card(E)$ et $card(F)$
   b) Montrer, par le principe fondamental des dénombrements que :
   $$card(E\times F\times G)=(card(E))\times(card(F))\times(card(G))$$

Sujet 2

Un dé, équilibré, cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6 est lancé 3 fois de suites. Le résultat d'un lancé est noté (a,b,c) avec a et b et c les résultats respectifs des trois jets d'un même lancé

1. En utilisant le principe fondamental des dénombrements, dénombrer les résultats possibles : $card(\Omega)$
2. Dénombrer les résultats pour lesquels a et b et c sont tous pairs
3. Dénombrer les résultats pour lesquels a et b et c ne sont pas de même parité

Sujet 3

Taha et sa femme Loubna ont invité $(n-1)$ couples amis à une fête. Ils disposent d'une table ronde à $2n$ chaises. Chaque femme devait s'assoir en face de son mari.

De combien de façon les $2n$ personnes peuvent s'assoir dans la table préparée par Taha et sa femme ?

Sujet 4

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $E=\{0,1,2,\dots\dots\dots,n\}$. Calculer les cardinaux des ensembles suivants :

$$A=\{(x,y)\in E^2;x<y\}\quad // \quad B=\{(x,y)\in E^2;x\leq y\}\quad // \quad C=\{(x,y)\in E^2;x+y=n\}$$

$$D=\{(x,y,z)\in E^3;x+y+z=n\}$$

Sujet 5

I. Soient E et F deux ensembles de cardinaux respectifs n et m (Entiers naturels non nuls)
   1. Quel est le nombre d'applications de E vers F ? Le nombre d'applications injectives de E vers F
   2. Soit $a\in E$ fixé et $b\in F$ fixé. Quel est le nombre d'applications f injectives de E vers F avec $f(a)=b$?
   3. Quel est le nombre d'applications f injectives de E vers F avec $f(a)=b$ ou $a\in E$ et $b\in F$

II. Trouver le nombre de surjections de E ($cardE=n$) vers un ensemble F à 2 éléments

III. Trouver le nombre de surjections d'un ensemble à $n+1$ éléments vers un ensemble à n éléments

Sujet 6

Soit E un ensemble non vide à n éléments. $P(E)$ désigne l'ensemble de ses parties de E

Pour A élément de $P(E)$, soit φ_A la fonction indicatrice de A :

$$\forall x \in E. \quad \varphi_A(x)=1 \text{ si } x \in A \text{ et } \varphi_A(x)=0 \text{ si non}$$

I. Montrer que pour A et B éléments de $P(E)$: $\varphi_A=\varphi_B \Leftrightarrow A=B$

II. $F_{(E,\{0,1\})}$ désigne l'ensemble des applications de E vers l'ensemble $\{0,1\}$.

On considère l'application f de $P(E)$ vers $F_{(E,\{0,1\})}$ donnée par : $\forall X \in P(E) f(X)=\varphi_X$

1- Montrer que : $card\left(F_{(E,\{0,1\})}\right)=2^n$

2- Montrer que f est injective

3- Soit $g \in F_{(E,\{0,1\})}$. On pose $Z=g^{-1}\{1\}$. Montrer que $f(Z)=g$ et déduire que f est surjective

4- Déduire de ce qui précède que : $card(P(E))=2^{card(E)}$

Sujet 7

Soit E un ensemble non vide et soit $x \in E$. On considère les ensembles :

$$M=\{A \in P(E) / x \in A\} \text{ et } N=\{A \in P(E) / x \notin A\}$$

1. Vérifier que : $P(E)=M \cup N$ et $M \cap N=\varnothing$
2. Montrer que h définie de M vers N par $h(A)=A-\{x\}$ est bijective
3. Déduire des questions 1- et 2- , par récurrence que si $card(E)=n$ alors $card(P(E))=2^n$

(Rem : Une troisième démonstration est donnée ultérieurement par le « binôme de Newton »)

Sujet 8

1. Simplifier les expressions suivantes : $(n+1)\times n!$ et $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ et $\dfrac{((n)!)^2}{(n-1)!\times(n+1)!}$ et $\dfrac{n \times n!}{(n+1)!}$
2. Soient $1 \leq p \leq n$. Montrer que : $C_{n+1}^{p}=\dfrac{n+1}{p}C_n^{p-1}$
3. Montrer que si $C_k^m=C_{k+1}^m$ alors $m \equiv 1[2]$
4. Montrer par le calcul :

   a) La relation de complémentarité : $C_n^m=C_n^{n-m}$ pour $0 \leq m \leq n$

   b) La relation de Pascal : $C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$ pour $1 \leq m \leq n$
5. Soient $0 \leq p \leq n$. Montrer que : $A_{n+1}^{p+1}=(n+1)A_n^p$

Sujet 9

1. Combien de mots, avec ou sans sens, peut-on former avec toutes les lettres de « TAYTMATIM » ?
2. Combien de Nombres peut-on former en utilisant les chiffres de 0662099126 ?

Sujet 10

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules noires et 6 boules vertes, indiscernables au toucher.

On choisit de cette urne 3 boules au hasard

I. Le choix des boules est fait simultanément. Alors :

1. Dénombrer le nombre de cas possibles
2. De combien de manières peut-on obtenir 3 boules de couleurs différentes deux à deux ?
3. De combien de manières peut-on obtenir 3 boules de même couleur ?
4. De combien de manières peut-on obtenir une boule blanche et deux boules vertes dans cette ordre ?
5. De combien de manières peut-on obtenir une boule blanche et deux boules vertes ?
6. De combien de manières peut-on obtenir 3 boules dont une exactement est blanche ?
7. De combien de manières peut-on obtenir 3 boules dont une au moins est blanche ?
8. De combien de manières peut-on obtenir 3 boules dont au plus est blanche ?

II. Répondre aux mêmes questions sachant que le choix est fait successivement et sans remise

III. Quels changement opérer sur les résultats précédent si le choix était successif et avec remise ?

IV. Une autre urne V contient 4 boules blanches et 7 boules noires et 4 boules vertes, indiscernables.

On tire au hasard 2 boules de l'urne U, successivement et sans remise:

- S'elles sont de même couleur, on les remet dans l'urne U
- Si non, elle les ajoute à l'urne V ; puis après on tire au hasard 3 boules de l'urne V SSR

1. Dénombrer le nombre de cas possible pour tirer 3 boules suivant cette expérience
2. Quelle est le nombre de cas possible si le tirage de l'urne V était simultané ?

Sujet 11

Une caisse contient trois jetons noirs portant les nombres 1 et 1 et 2 , et quatre jetons rouges portant les nombres 1 et 1 et 1 et 2, tous indiscernables au toucher. On choisit successivement et sans remise trois jetons de cette caisse

1. De combien de façons peut-on obtenir exactement deux jetons rouges ?
2. De combien de façons peut-on obtenir des jetons dont 1 seulement est noir et avec des nombres dont la somme est 4
3. Refaire les questions précédentes avec un choix successif et avec remise

Sujet 12

On dispose d'une grille de 21 cellules (7 colonnes et 3 lignes)

1. On colorie simultanément en noir, 4 cellules de cette grille. Dans combien de cas les 4 cellules coloriées se trouvent sur une même colonne ? Même ligne ?
2. On colorie successivement et sans répétition et de quatre couleurs toutes différentes 4 cellules de cette grille. Dans combien de cas les 4 cellules coloriées se trouvent sur une même ligne ?

Sujet 13

Une urne contient 10 boules blanches et 10 boules rouges toutes indiscernables au toucher.
On tire une boule de l'urne. Si elle est rouge, on la remet dans l'urne. Si elle est blanche on la remplace par trois boules rouges dans l'urne. Puis on tire une deuxième et dernière boule de l'urne

1- Quel est le nombre de tirage possibles ?
2- Quel est le nombre de cas pour avoir des boules de même couleur ?
3- Quel est le nombre de cas pour avoir des boules de couleurs différentes ?
4- La première boule est blanche, dénombrer les cas pour avoir des boules de couleurs différentes ?

Sujet 14

On dispose de n boules indiscernables numérotée de 1 à n ; et de p trous indiscernables numérotés de 1 à p avec $n \leq p$. On met au hasard les n boules dans les p trous.

On suppose que chaque trou peut contenir de 1 à n boules

1. Quel est le nombre de façons pour placer les n boules dans les p trous ?
2. Quel est le nombre de façons pour placer les n boules dans seulement les trous numérotés 1 et 2 ?
3. Quel est le nombre de façons pour placer les n boules dans seulement deux trous ?

On suppose que chaque trou ne peut contenir qu'une seule boule

1. Quel est le nombre de façons pour placer les n boules dans les p trous ?
2. Quel est le nombre de façons pour placer les n boules sachant que la boule portant le numéro 2 est placée dans le trou numéro 2
3. On choisit un trou et on y place la boule portant le numéro 1.Quel est le nombre de façons possibles pour placer les n boules?
4. On choisit une boule et on choisit un trou dans lequel on place la boule choisie. Quel est le nombre de façons pour placer les n boules?
5. Soit $m \leq n$.On choisit m boules et on choisit m trous dans lesquels on les place. Quel est le nombre de façons pour placer les n boules?

Sujet 14

1. Dans le développement de $(x+y)^{21}$, Quel est le coefficient de $x^7 y^{14}$
2. Dans le développement de $(2x-y)^{21}$, Quel est le coefficient de $x^7 y^{14}$
3. Dans le développement de $(x+y+z)^{41}$, Quel est le coefficient de $x^7 y^{14} z^{20}$

Sujet 15

Soit E un ensemble non vide à n éléments.

Quel est le nombre de parties de E ayant p éléments ? $(0 \leq p \leq n)$. Déduire que : $card(P(E)) = 2^n$

Sujet 16

- On pose: $A=C_{15}^{0}+C_{15}^{2}+C_{15}^{4}+\ldots+C_{15}^{14}$ et $B=C_{15}^{1}+C_{15}^{3}+C_{15}^{5}+\ldots+C_{15}^{15}$

1- Calculer $A+B$ et $A-B$

2- Calculer A et B

3- Généraliser ces résultats en prenant n à la place de 15

- Dans une urne il y'a C_{15}^{0} boules qui portent le nombre 0 et C_{15}^{1} boules qui portent le nombre 1 …… et C_{15}^{15} boules qui portent le nombre 15 (Toutes les boules sont indiscernables au toucher)

  On choisit au hasard de cette urne une boule.

1- De combien de façons peut-on obtenir une boule qui porte un nombre pair ? Impair ?

2- De combien de façons obtient-on une boule qui porte un nombre strictement inférieur à 11 ?

3- De combien de façons obtient-on une boule qui porte un nombre compris entre 2 et 11 ?

4- De combien de façons obtient-on une boule qui porte un nombre au moins égale à 6 ?

Sujet 17

On désire montrer que : $\sum_{k=1}^{k=n} k\,C_n^k = n\,2^{n-1}$. Pour cela, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{k=n} k\,C_n^k$

- Coefficients binomiaux

1. Montrer que: $\forall 0\le k\le n.\quad k\,C_n^k=n\,C_{n-1}^{k-1}$
2. Déduire, par un changement d'indice, que : $S_n=\sum_{k=1}^{k=n} k\,C_n^k=n2^{n-1}$

- On considère la fonction numérique définie sur IR par : $f(x)=(1+x)^n$

1. Développer $f(x)$ par la formule de binôme de Newton
2. En dérivant f de deux manières, retrouver le résultat précédent

Exercice 18

1. Etablir que : $\forall n\in\mathbb{N}.\ \forall 0\le k\le n.\quad \frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$
2. Déduire en fonction de n la somme $H_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Sujet 19

Montrer de trois méthodes que : $C_{n-2}^{p}+2C_{n-2}^{p-1}=C_{n-2}^{p-2}=C_n^p$ (1)

1. Par le calcul algébrique
2. Par la relation de Pascal
3. En construisant une situation de dénombrement dont (1) est la solution

Sujet 20

Soit n un entier naturel non nul. En construisant une situation (de dénombrement) adéquate,

1- Montrer que : $C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \ldots + C_n^n C_n^0 = C_{2n}^n$

2- Déduire que : $\sum_{k=0}^{k=n} \left(C_n^k\right)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Sujet 21

E est un ensemble non vide et fini à n éléments $(n \geq 1)$.

Trouver les cardinaux des ensembles suivants :

1. $F = \{(A,B) \in P(E)^2 ; A \cup B = E \; et \; A \cap B = \varnothing\}$
2. $G_A = \{B \in P(E) ; A \cup B = E\}$ avec $cardA = p$ fixé
3. $H = \{(A,B) \in P(E)^2 ; A \cup B = E\}$
4. $K = \{(A,B) \in P(E)^2 ; A \cap B = \varnothing\}$ (Morgan)
5. Calculer la somme des cardinaux de toutes les parties de E

Sujet 22

On jette un dès cubique de six faces numérotées de 1 à 6, non truqué, 2 fois de suite

Pour chaque couple (r_1, r_2) de résultats obtenus, on note $X = (r_1, r_2)$

1. Quel est le nombre de résultats possibles
2. Quel est le nombre de résultats possibles pour obtenir :
   - $r_1 \equiv 0[2]$ et $r_2 \equiv 0[3]$
   - r_1 et r_2 sont de parité distincts
   - $r_1 + r_2 = 7$

1. Quel est l'ensemble ω des valeurs possibles de X ?
2. Calculer $card(X = x_i)$ pour chaque $x_i \in \omega$ et $\sum_{x_i \in \omega} card(X = x_i)$