Dérivabilité

Br-Rachid www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 1 :

A- Soient $f(x)=x^2+3x+1$

1. Calculer le nombre dérivée de f en 0
2. Déduire une valeur approximative de $10^{-6}+3\times 10^{-3}+1$
3. Former l'équation de la tangente à ζ_f au point $A_{(0,1)}$ puis la représenter

B- Soients $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

1. Calculer le nombre dérivée de g en 2 . Déduire une valeur approximative de $g(2{,}001)$
2. Former l'équation de la tangente à ζ_g au point $B_{(2,5)}$ puis la représenter

Sujet 2 :

Soit $f(x)=x\sqrt{x-1}$ définie sur $[1,+\infty[$

1. a) Montrer que $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$. Déduire que f n'est pas dérivable en 1 à droite.
   b) Déterminer la demi-tangente à ζ_f au point $A_{(1,0)}$
2. a) Effectuer la division euclidienne de x^3-x^2-4 par $x-2$
   b) Montrer que : $\forall x\geq 1.\quad \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{x^2+x+2}{x\sqrt{x-1}+2}$
   c) Déduire que f est dérivable en 2 . Donner l'équation de la tangente à ζ_f au point $B_{(2,2)}$

Sujet 3 :

Soit $\begin{cases} f(x)=sinx & si \quad x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{2-2cosx}{x} & si \quad x<0 \end{cases}$

1. Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et à gauche. f est-elle dérivable en 0 ?
2. Donner des approximations de $f(0{,}001)$ et de $f(-0{,}001)$
3. Ecrire l'équation de la tangente à ζ_f au point $A_{(\frac{\pi}{2},1)}$

Sujet 4 :

Soit $\begin{cases} f(x)=x^2\sin(\dfrac{1}{x}) & si \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1. Montrer que : $\forall x\neq 0.\quad |f(x)|\leq x^2$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
2. a) Montrer que : $\forall x\neq 0.\quad \left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leq |x|$. En déduire que f est dérivable en 0
   b) Déterminer la nature de la tangente à ζ_f au point $O_{(0,0)}$

Sujet 5

Soit $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2(x-1)}{\sqrt{x-1}} & si \quad x>1 \\ f(1)=0 & \end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Est-ce que f est dérivable en 1 à droite ?
3. Calculer le nombre dérivé de f en 2. Déduire l'équation de la tangente de ζ_f au point $A(2,4)$
4. Donner une valeur approchée de $f(1{,}9999)$

Sujet 6

Soit $f(x)=|x^2+2x|-3|x|+1$

1. Ecrire l'expression de f sans valeur absolue
2. a) Etudier la dérivabilité de f en -2

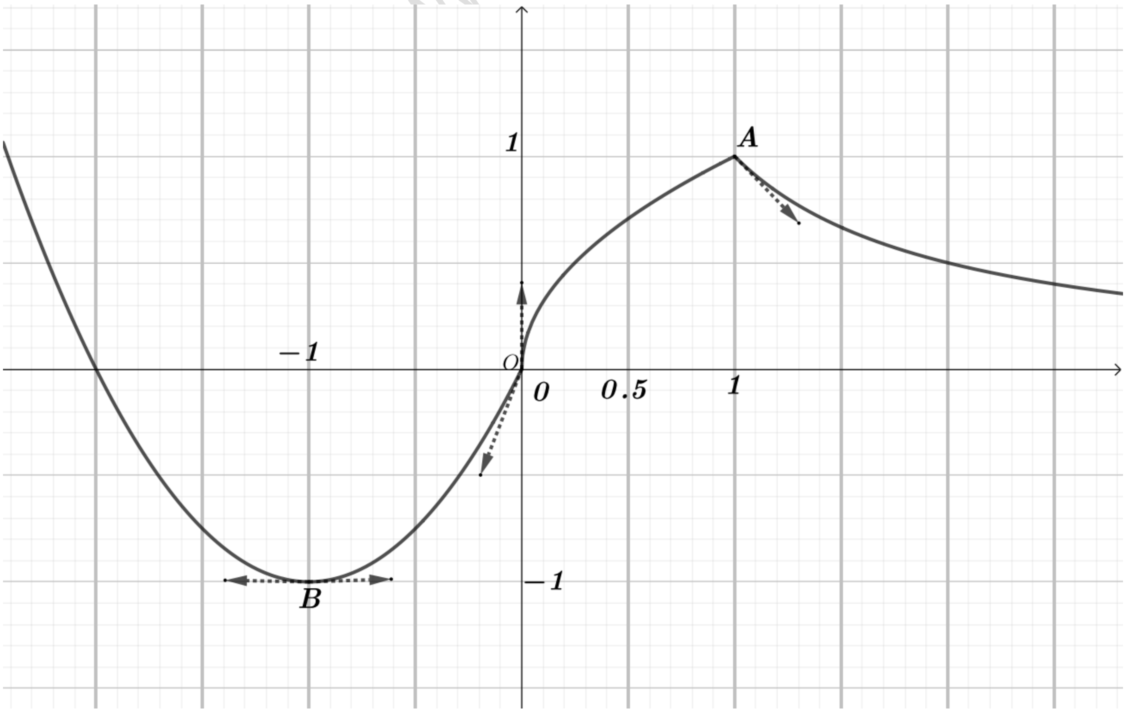
   b) Donner les équations des demi tangentes à ζ_f à droite et à gauche au point d'abscisse -2

   c) Donner des valeurs approchées de $f(-2{,}001)$ et de $f(-1{,}99)$
3. Calculer $f'_d(0)$ et $f'_g(0)$. Préciser les équations des demi tangentes à ζ_f à droite et à gauche en 0

Sujet 7

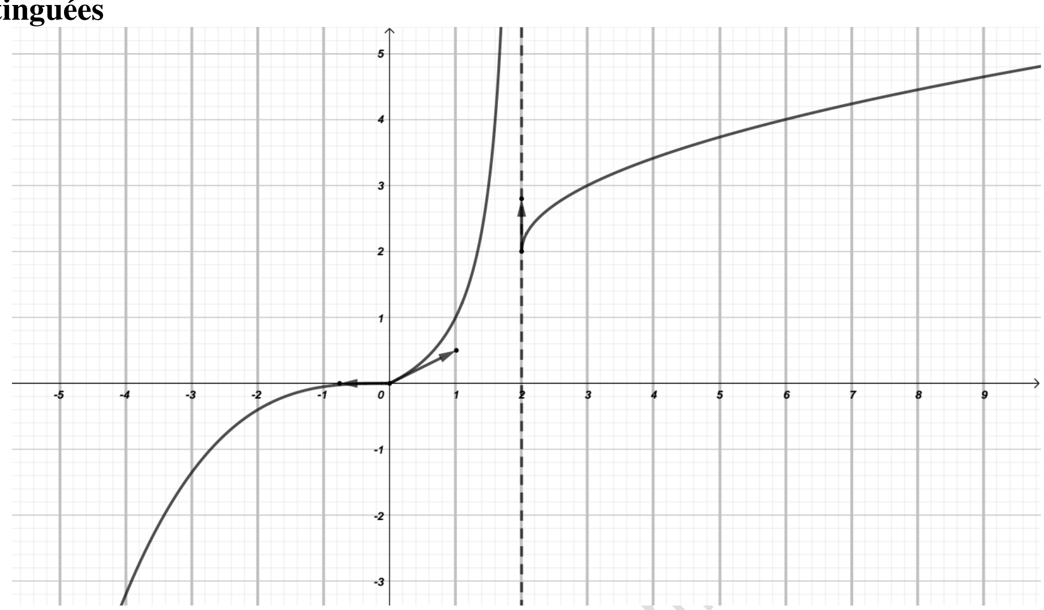
Dans la courbe ζ_f ci-dessous :

1. Déterminer les nombres dérivés de f en -1 , et en 1 à droite , et en 0 à droite et à gauche
2. Poser le tableau des variations de f



Sujet 8

On donne la courbe de f . Poser les tableaux des variations et de concavité. Préciser les limites distinguées



Sujet 9

1. Calculer les dérivées d'ordres 1 et 2 et 3 et 4 et 5 de $f(x)=2x^5-3x^4+5x^3-\frac{1}{2}x^2-9x+\sqrt{2}$
2. Calculer la dérivée de f dans les cas suivants :

$f(x)=\frac{-2x^2+1}{x+2}$ // $f(x)=x^2\cos\sqrt{x}$ // $f(x)=\sin(x^3-2x+1)^2$

$f(x)=\frac{\tan(3x+1)}{\sqrt{x}}$ // $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}+\sqrt{2x}+3$ // $f(x)=x\cos(\frac{1}{x})$

Sujet 10

Calculer en utilisant des dérivées convenables :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ // $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x}$ // $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$ // $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{2\sin x-\sqrt{3}}$

$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{2\cos^5 x-5\sin^2 x+2}{\sin x}$ // $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x-x^2+x^3}-1}{x}$

Sujet 11

Soit la fonction définie par: $f(x)=\frac{\sqrt{2-\cos x}\ -1}{x}$ et $f(0)=0$

1. Déterminer D_f puis montrer que f est impaire
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter les résultats géométriquement
3. a) Calculer à l'aide d'une dérivée $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\ -1}{x}$

   b) En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$
4. Etudier la dérivabilité de f en 0 . Préciser la nature de la tangente à C_f au point $A(0,0)$
5. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée

Sujet 12

Soit $f(x)=x-2+\dfrac{4}{x-1}$

1. Déterminer D_f et calculer $f(0)$ et $f(2)$
2. a) Calculer les limites de f à droite et à gauche en 1 et interpréter les résultats graphiquement

   b) Montrer que $(y=x-2)$ est une droite asymptote oblique à ζ_f au voisinage de $\pm\infty$
3. a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

   b) Résoudre $f'(x)=0$ et poser le tableau des variations de f

   c) Déterminer les extremums de f
4. Montrer que ζ_f admet deux tangentes parallèles à la droite $(y=3x)$ et donner leurs équations
5. Montrer que $f''(x)=\dfrac{4}{(x-1)^3}$. Déduire la concavité de ζ_f sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$
6. Représenter ζ_f dans un R.O.N

Sujet 13

Soit $f(x)=x+2+\dfrac{3}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

1. a) Montrer que : $\forall x\neq 1.\ (2-x)\neq 1$ et que $f(2-x)+f(x)=6$

   b) Déduire que ζ_f admet un centre de symétrie A dont on précisera les coordonnées
2. a) Calculer les limites de f en 1 et interpréter les résultats géométriquement

   b) Montrer que ζ_f admet en $+\infty$ une asymptote oblique et en donner une équation cartésienne
3. Justifier la dérivabilité de f sur D_f et montrer que $f'(x)=1-\dfrac{3}{(x-1)^2}$ pour tout $x\in D_f$
4. a) Montrer que ζ_f admet deux tangentes horizontales

   b) Montrer que ζ_f admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y=-2x$

   c) Combien admet ζ_f de tangentes perpendiculaires à la droite d'équation $y=x$?
5. Donner le tableau des variations de f et déterminer les extremums f
6. Montrer que $f''(x)=\dfrac{6}{(x-1)^3}$ pour tout $x\in D_f$ et déduire la concavité de ζ_f
7. Représenter ζ_f dans un repère orthonormé

Sujet 14

Soit $f(x)=|x|-\dfrac{x}{x^2-1}$

1. Déterminer D_f et calculer $f(0)$ et $f(\sqrt{2})$ et $f(-3)$
2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$. Déduire est asymptote oblique à ζ_f au voisinage de $+\infty$

   b) Montrer que $(y=-x)$ est une asymptote oblique à ζ_f au voisinage de $-\infty$
1. Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$. Interpréter ces résultats graphiquement
2. Etudier la dérivabilité de f en 0 et déduire que $O_{(0,0)}$ est un point anguleux de ζ_f
3. a) Montrer que $f'(x)=1+\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ si $x>0$ et $f'(x)=x^2\dfrac{(x+3)}{(x^2-1)^2}$ si $x<0$

   b) Poser le tableau des variations de f

   c) Montrer que f admet une valeur minimale à déterminer

   d) Donner l'équation de la tangente à ζ_f au $A_{(\sqrt{2},0)}$ point
4. Représenter, dans un R.O.N :

   a) Les droites asymptotes $(y=x)$ et $(y=-x)$ et $(x=1)$ et $(x=-1)$

   b) Les tangentes au points $B_{\left(-3\ ,\ \frac{27}{8}\right)}$ et $O_{(0,0)}$ et $A_{(\sqrt{2},0)}$

   c) La courbe ζ_f dans un R.O.N

Sujet 15

Soit la fonction définie par: $f(x)=\dfrac{|x|(2-x)}{1-|x|}$

1. a) Déterminer D_f et écrire $f(x)$ sans valeur absolue
2. a) Calculer les limites de f aux bornes de D_f

   b) Déterminer les branches infinies de ζ_f
3. Etudier la dérivabilité de f en 0
4. Etudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$
5. Former alors le tableau des variations de f
6. Représenter ζ_f dans un R.O.N

Sujet 16

Soit la fonction définie par: $f(x)=\dfrac{\cos 2x \;-1}{\sin 2x}$

1. Résoudre l'équation $\sin 2x=0$ dans $\mathbb{R}$ et déduire D_f
2. a) Montrer que f est périodique et π en est une période . Interpréter géométriquement ce résultat

   b) Montrer que f est impaire . Quelle interprétation géométrique en déduire ?

   c) Déduire de ce qui précède le domaine d'étude de f
1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^{-1}} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement
2. a) Montrer que : $\forall x\in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[.\qquad f(x)=-tanx$

   b) Calculer $f'(x)$ pour $x\in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et poser le tableau des variations de f sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$
3. a) Montrer que : $\forall x\in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[.\qquad f''(x)=-2\,tanx(1+\tan^2 x)$

   b) En déduire la concavité de ζ_f sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$
4. Représenter ζ_f sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ puis sur $\left]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$

Sujet 17

La fonction f est définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\tan(\frac{\pi}{2}\sqrt{x}) & si \quad 0\le x<1 \\ f(x)=\sqrt{x^2-x}\;-\;x & si \quad x\ge 1\end{cases}$

1. Calculer $f(0)$ et $f(\frac{1}{4})$ et $f(1)$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+\dfrac{1}{2}x)$. Interpréter géométriquement
1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Interpréter géométriquement
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ et interpréter ce résultat
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ et interpréter ce résultat
4. Calculer $f'(x)$ sur les intervalles $]1,+\infty]$ et $]0,1[$. Poser le tableau des variations de f
5. Représenter ζ_f dans un R.O.N

Sujet 18

On donne le tableau récapitulant l'étude de f . Représenter ζ_f dans un R.O.N

x	$-\infty$		-1		0		1
f''		$-$	‖	$+$	|	$+$	
f'		$+$	-1 ‖ 0	$-$	|	$-$	$+\infty$
f	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	5

Sujet 19

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}.\quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}.\quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$
3. Conjecturer puis montrer par récurrence, la dérivée nième de la fonction $f(x) = 1/x$

Sujet 20

Soient les deux fonctions définies sur IR par : $f(x) = x^4 - 3x + 1$ et $g(x) = 2x^3 - 3x - 1$

On pose $h(x) = f(x) - g(x)$

1. Montrer que ζ_h admet deux branches paraboliques de direction (Oy)
2. a) Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$ et poser les tableaux des variations de h et de concavité de ζ_h

   b) Déterminer deux points d'inflexion de ζ_h et préciser les équations des tangentes en ces points
3. Montrer que ζ_f est en dessus de ζ_g

Sujet 21

1. Soit $f(x) = x - sinx$

   a) Calculer $f'(x)$ et poser le tableau des variations de f

   b) Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$
2. Soit $g(x) = -1 + \dfrac{x^2}{2} + cosx$

   a) Montrer que $g'(x) = f(x)$ et déduire le tableau des variations de g

   b) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$
3. a) Montrer que : $\forall x > 0.\quad x - \dfrac{1}{6}x^3 \leq sinx \leq x$

   b) Déduire que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{sinx - x}{x^2} = 0$ et en déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{sinx - x}{x^2}$

Sujet 22

1. Soit $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\neq 0)$

   a) Montrer que les fonctions $F(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)+k$ avec $k\in IR$ vérifient: $\forall x\neq 0. \quad F'(x)=f(x)$

   b) Parmi ces fonctions, déterminer celle qui vérifie : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=-1$

2. Soit $g(x)=\left(1+tg^2(x)\right)tg(x) \qquad \left(x\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$

   a) Montrer que les fonctions $G(x)=\frac{1}{2}tg^2(x)+k$ avec $k\in IR$ vérifient : $\forall x\neq 0. \quad G'(x)=g(x)$

   b) Parmi ces fonctions, déterminer celle qui vérifie : $G(0)=\pi$

Sujet 23

On considère l'équation différentielle $(E): y''+16y=0$

1. Donner la solution générale de (E)
2. Déterminer la solution g de (E) telle que : $g(0)=1$ et $g'(0)=16$
3. Ecrire la solution g en utilisant la fonction cos seulement
4. Résoudre dans $]-\pi,\pi[$ l'équation $g(x)=1$

Sujet 24

On considère l'équation différentielle (E) $: 4y''+y=-2$

1. Déterminer la solution k de (E) telle que $k(0)=0$ et $k'(0)=1$
2. Ecrire la solution k en utilisant la fonction sin seulement
3. Résoudre dans $]-\pi,\pi[$ l'équation $g(x)=0$

Sujet 25

Soit $f(x)=x^3+2x^2+x+1$

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$
2. Donner les extremums de f
3. Montrer que la courbe de f admet un point d'inflexion à déterminer
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement une solution s dans IR et que $s\in]-2,-1[$

Sujet 26 : Soit $\begin{cases} v(x)=\dfrac{\sin(x)}{x} \quad si \quad x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ v(0)=1 \end{cases}$

a) Calculer les limites de v en 0 à droite et en $\frac{\pi}{2}$ à gauche

b) Montrer que v est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Calculer sa dérivée puis poser son tableau des variations