Derivation – Etude de fonction – 2PC

Exercice 1 :

Soit f $\quad f(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{x-3}$ si $x\neq 3$ et $f(3)=9$

1. Montrer que f est continue en 3
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$. f est-elle derivable en 3 ?
3. Ecrire l'equation de la tangente de ζ_f au point $A_{(3,9)}$
4. Donner une valeur approximative de $f(2,9)$

Exercice 2 :

Soit f definie par $\begin{cases} f(x)=x\sqrt[3]{x} & si \quad x>0 \\ f(x)=\cos x-1 & si \quad x\leq 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 0
2. Etudier la derivabilité de f en 0 et preciser $f'(0)$
3. Quelle est la nature de la tangente de ζ_f au point $O_{(0,0)}$

Exercice 3 :

Soit la fonction $\begin{cases} f(x)=(1+2x)\sqrt{x} & si \quad x\geq 0 \\ f(x)=\sin 3x & si \quad x<0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 0
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpreter graphiquement ce resultat
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpreter graphiquement ce resultat

Exercice 4 :

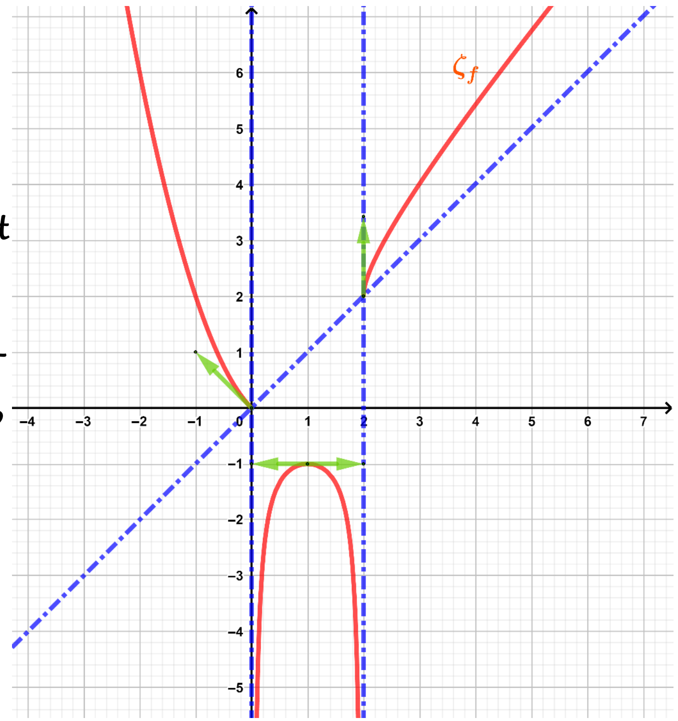
Soit f derivable sur IR telle que $f'(1)=2$

1. Ecrire l'equation de la tangente de ζ_f au point $A_{(1,-1)}$
2. a- On suppose que $(D): y=3x-2$ est tangente a ζ_f au point B d'abscisse 2 . Calculer $f'(2)$ et $f(2)$

   b- Donner une valeur approximative de $f(1,99)$

Exercice 5 :

La fonction f est representé graphiquement ci-bas



1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
2. Déterminer $f'(1)$ et $f'_g(0)$
3. a- La fonction f est-elle derivable en 2 ?
4. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

Exercice 6 : Calculer les fonctions derivés dans les cas suivants :

1. $f(x)=x^7-2x^2+4$ et $g(x)=\dfrac{2-x}{x-1}$ et $h(x)=\sqrt{2x+1}$
2. $f(x)=\sqrt{x}.\sin x$ et $g(x)=\cos^3 x$ et $h(x)=\tan(3x)$

Exercice 7 : Calculer les fonctions derivés dans les cas suivants :

$$f(x)=\sqrt{1+x^2} \text{ et } g(x)=\sqrt{2-\sin x} \text{ et } h(x)=\cos\sqrt{x}$$

Exercice 8 :

La fonction f admet une fonction reciproque avec $f(1)=2$ et $f'(1)=3$. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(2)$

Exercice 9 : Calculer les fonctions derivés dans les cas suivants :

1. $f(x)=\sqrt[3]{2x-3}$ et $g(x)=\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^5$ et $h(x)=\dfrac{2x+1}{1+\sqrt[3]{x}}$
2. $f(x)=(1-2x)^{\frac{5}{3}}$ et $g(x)=\cos^{\frac{3}{4}} x$ et $h(x)=\left(1+x^3\right)^{\frac{3}{2}}$

Exercice 10 :

On donne $g(x)=x+\sqrt{x-2}$ definie sur $[2,+\infty[$

1. Montrer que g n'est pas derivable en 2 a droite
2. Montrer que : $\forall x>2.\quad g'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$
3. Montrer que g admet une fonction reciproque et la definir
4. Resoudre l'equation $g(x)=4$. En deduire $g^{-1}(4)$

Exercice 11 :

Soit $\begin{cases} f(x)=x\cos x-\sin x & si \quad 0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2} \\ f(x)=\dfrac{x}{1+x^2} & si \quad x<0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 0
2. Etudier et interpreter la derivabilité de f en 0
3. Calculer la derivée de f sur $]-\infty,0[$ et sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$
4. Determiner les variations de f sur $]-1,0[$
5. Calculer $f''(x)$ sur $]-\infty,0[$ et sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 12 :

Partie 1 :

On considère la fonction $f(x)=x-sinx$ definie sur $\mathbb{R}$

Poser le tableau des variations de f et déduire son signe

Partie 2 :

On considère la fonction $g(x)=cosx-1+\dfrac{1}{2}x^2$

1. Montrer que $g'(x)=f(x)$. Poser son tableau des variations
2. Determiner le signe de g et déduire que :

$$\forall x\in\mathbb{R}.\quad 1-\frac{1}{2}x^2\leq cosx$$

Exercice 13 : Soit $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1$

1. Determiner $\zeta_f \cap (Oy)$
2. a- Montrer que $f(-1-x)=\frac{25}{6}-f(x)$

   b- Interpreter graphiquement ce resultat
3. Calculer et interpreter $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$
4. Calculer $f'(x)$. Poser le tableau des variations de f
5. Determiner les tangentes de ζ_f en 1 et -2
6. Montrer que $f(x)=0$ a exactement trois solutions
7. Montrer que : $\exists!\,\alpha\in[2,3].\quad g(x)=x$
8. Determiner la concavité de ζ_f et son point d'inflexion
9. Soit g la restriction de f a $[1,+\infty[$. Montrer que g admet une fonction reciproque a definir
10. Representer graphiquement ζ_f et $\zeta_{g^{-1}}$ dans un RON
11. Montrer que g^{-1} est derivable en α et que

$$\left(g^{-1}\right)'(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2+\alpha-2}$$

Exercice 14 :

On considère fonction $f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$ definie sur $[0,+\infty[$

1. Calculer $f(0)$ et $f(2)$ et $f(8)$
2. Determiner la branche infinie de ζ_f au voisinage de $+\infty$
3. a- Montrer que :

$$\forall x>0.\ f(x)-x=\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+2\sqrt{2}\right)$$

   b- En deduire les solution de l'equation $f(x)=x$
4. Montrer que $f(x)\geq x$ si $[0,2]$ et $f(x)\leq x$ si $x\geq 2$

   b- En deduire la position de ζ_f est de la droite $\Delta: y=x$
5. Montrer que ζ_f admet en 0 une demi tangente verticale
6. a- Montrer que : $\forall x>0.\quad f'(x)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^2}$

   b- Poser le tableau des variations de f et representer ζ_f
7. Montrer que f a une fonction reciproque definie sur $[0,4[$
8. Donner l'expression de $f^{-1}(x)$
9. Representer graphiquement la courbe de f^{-1}

Exercice 15 :

On considère fonction : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

1. Determiner D_f et determiner la parité de f
2. Determiner la branche infinie de ζ_f au voisinage de $+\infty$
3. Calculer $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ et interpreter graphiquement le resultat
4. Montrer que $f'(x)=\dfrac{-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$ et poser le tableau des variations de f sur $]2,+\infty[$
5. Montrer que $f''(x)=\dfrac{12x}{(x^2-4)^2\sqrt{x^2-4}}$ et determiner la concavité de ζ_f sur $]2,+\infty[$
6. Representer graphiquement ζ_f
7. a- Montrer que g la restriction de f a $]2,+\infty[$ admet une reciproque et determiner son domaine de definition

   b- Donner l'expression de $g^{-1}(x)$
8. Representer graphiquement $\zeta_{g^{-1}}$

Exercice 16 :

On considere la fonction $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$ definie sur $[0,1]$

1. Montrer que ζ_f admet $(D): x=\dfrac{1}{2}$ pour axe de symetrie
2. Etudier la derivabilité de f en 0 a droite et interpreter graphiquement le resultat obtenu
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]0,1[$
4. Poser le tableau des variations de f et representer ζ_f

Exercice 17 :

Soit $f(x)=3x+2(x-1)\sqrt{x-1}$ avec $x\in[1,+\infty[$

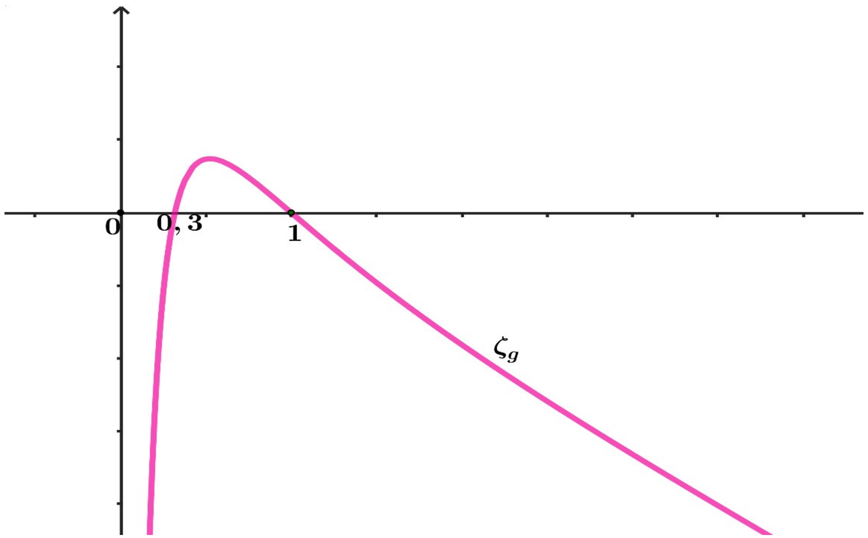
1. Determiner la branche infinie de ζ_f au voisinage de $+\infty$
2. Calculer et interpreter graphiquement $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.
3. Montrer que $f'(x)=3(1+\sqrt{x-1})$ puis calculer $f''(x)$
4. Montrer que f admet une fonction reciproque definie sur $[3,+\infty[$ et que $f^{-1}(8)=2$ et $(f^{-1})'(8)=\dfrac{1}{6}$
5. Representer graphiquement ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$ dans un RON
6. Determiner graphiquement $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{x}$

Exercice 18 :

f deux fois derivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $f(5)=2$ avec

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$ et

x	0		1		5		$+\infty$
f'	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



La courbe de la fonction $g(x)=f(x)-x$ sur $]0,+\infty[$

Question : Representer graphiquement ζ_f

Exercice 19 :

Soit $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x}$ definie sur $[0,+\infty[$

1. Calculer $f(0)$ et $f(4)$ et $f(8)$
2. Calculer et interpreter $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
3. Etudier et interpreter la derivabilité de f en 0 a droite
4. Montrer que $f'(x)=\dfrac{4}{3}\ \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Poser le T-Variations de f
5. Ecrire l'equation de la tangente a ζ_f au point d'abscisse 8
6. Montrer $f''(x)=\dfrac{4}{9}\ \dfrac{x+2}{x\sqrt[3]{x^2}}$ et déduire la concavité de ζ_f
7. Montrer que $g=f_{[1,+\infty[}$ admet une reciproque g^{-1} a definir
8. a- Ecrire l'equation de la tangente a $\zeta_{g^{-1}}$ au point $A_{(8,8)}$

   b- Poser le tableau des variations de g^{-1}
9. Montrer que $h=f_{[0,1]}$ admet une reciproque h^{-1} a definir
10. Representer les courbes ζ_f et $\zeta_{g^{-1}}$ et $\zeta_{h^{-1}}$ dans un RON
11. a- Calculer graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g^{-1}(x)}{x}$

    b- Determiner graphiquement $\lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{g^{-1}(x)-g^{-1}(-3)}{x+3}$

Exercice 20 :

Partie 1 :

Soit $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$ definie sur $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$

1. Montrer que f est impaire et interpreter graphiquement ce resultat
2. a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b- En déduire la branche infinie de ζ_f au voisinage de $+\infty$
3. Etudier la derivabilité de f en 2 a droite. En déduire la demi-tangente de ζ_f en 2 a droite
4. Montrer que : $\forall x>2.\quad f'(x)=\frac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}}$. En déduire les variations de f sur $[2,+\infty[$
5. Representer graphiquement ζ_f dans un repere orthonormé

   (On admet que ζ_f est convexe sur $[2,+\infty[$)

Partie 2 :

Soit $\begin{cases} g(x)=f(x) & si \quad x\in]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[\\ g(x)=\sqrt{4-x^2} & si \quad x\in]-2,2[\end{cases}$

6. Montrer que la restriction de g a $]-2,2[$ est paire
7. Montrer qur g est continue en 2
8. a- Etudier la derivabilité de g en 2 a gauche

   b- Interpreter graphiquement le resultat obtenu
9. Montrer que : $\forall x\in]-2,2[.\quad g'(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. En déduire le tableau des variations de g sur $]-2,2[$
10. Representer graphiquement ζ_g (N.B : ζ_g convexe sur $[0,2[$)

Partie 3 :

Soit h la restriction de f a l'intervalle $[2,+\infty[$

11. Montrer que h admet une fonction reciproque h^{-1} definie sur un intervalle J a determiner
12. Poser le tableau des variations de h^{-1}
13. Representer graphiquement $\zeta_{h^{-1}}$
14. Determiner l'expression de $h^{-1}(x)$ pour tout $x\in[0,1[$