Sujet 1:

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1$

1. Etudier les extremums de f. Déterminer la nature du point $A(0,1)$
2. Déterminer les branches infinies de C_f et représenter C_f dans un repère orthonormé92

Sujet 2 :

Soit f dérivable en 0 avec $f'(0)=1$ et vérifiant : $\forall x,y\in IR.\ f(x+y)-xy=f(x)+f(y)$

1. Montrer que $f(0)=0$
2. Soit $x\in IR$. Montrer que : $\forall h\in IR^{\star}.\quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=x+\frac{f(h)}{h}$
3. Déduire que f est dérivable sur IR et donner sa dérivée
4. Donner l'expression de $f(x)$

Sujet 3 :

Soient f et g continues sur l'intervalle $[a,b]$ telles que : $f(a)=g(a)$ *et* $f'(x)\leq g'(x)\quad \forall x\in[a,b[$

1. Montrer que : $f(x)\leq g(x)\quad \forall x\in[a,b[$
2. Applications :
   a) Montrer que : $\forall x\geq 0.\quad 1+nx\leq(1+x)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   b) Montrer que : $\forall x\geq 0.\quad (1+x)^r\leq 1+rx$ pour tout $r\in\mathbb{Q}^{+}\cap[0,1]$
   c) Montrer que : $\forall x\geq 0.\quad (1+x)^r\geq 1+rx$ pour tout $r\in\mathbb{Q}^{+}\cap[1,+\infty]$
3. Montrer que : $\forall x\geq 0.\quad x-\frac{x^3}{3}\leq Arctg(x)\leq x$. Déduire que : $\lim_{x\to 0}\frac{Arctg(x)-x}{x^2}=0$

Sujet 4 :

Soit : $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ si $x\in I=\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$ et $f(0)=1$

1. Vérifier que f est paire et est continue sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
2. Dérivabilité en 0.
   a) Montrer que : $\forall 0<x<\frac{\pi}{2}.\quad x-\frac{1}{6}x^3<\sin(x)<x$
   b) Déduire que f est dérivable en 0. Quelle est la nature de la tangente à C_f au point $A(0,1)$
3. Variations de f – Courbe de f
   a) Vérifier que f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer sa dérivée
   b) Donner l'équation de la demi-tangente à C_f au point $B\left(\frac{\pi}{2},\frac{2}{\pi}\right)$
   c) Donner le signe de $x\cos(x)-\sin x$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et déduire les variations de f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
   d) Représenter C_f

Sujet 5:

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\left(1-\arctan\left(\sqrt[3]{x}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. a) Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite.
   b) Préciser la demi tangente à la courbe de f au point $A(0,1)$
3. Calculer la dérivée de f sur $\left]0,(\tan 1)^3\right[$

Sujet 6 :

Soit : $u(x)=Arctg(x)+Arctg\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Déterminer la parité de u et calculer ses limites
1. Calculer la dérivée de u
2. Montrer que : $Arctg(|x|)+Arctg\left(\frac{1}{|x|}\right)=\frac{\pi}{2}\qquad (x\neq 0)$

Sujet 7 : Soit : $\begin{cases} f(x)=x^2 arctg\frac{1}{x} & ; \quad x>0 \\ f(x)=(4+x)\sqrt[3]{-x} & ; \quad x\leq 0 \end{cases}$

4. Montrer que f est continue en 0
5. Etudier la dérivabilité de f en 0
6. Calculer $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Déterminer la branche infinie de C_f au voisinage de $-\infty$
7. a) Montrer que $\forall t>0.\quad \frac{t}{1+t^2}<arctg(t)<t$ et déduire $\lim\limits_{t\to 0}\frac{arctg(t)-t}{t^2}$
   b) Déduire la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$
8. Résoudre l'équation $f(x)=x$ dans IR^+ et montrer que : $\forall x>0.\quad f(x)<x$
9. Calculer la dérivée de f et poser son tableau des variations
10. Vérifier que g, la restriction de f à IR^+ est bijective de IR^+ vers IR^+
11. Représenter la courbe de f et celle de g^{-1} dans un repère orthonormé
12. Etude de deux suites :
    a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*.\ \exists! u_n>0.\ \exists! v_n>0.\quad f(u_n)=\frac{1}{n}\quad et\quad f(v_n)=n$
    b) Etudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n)
    c) Montrer que $\lim(u_n)=0$ et $\lim(v_n)=+\infty$

Sujet 8 :

Soit $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$

1. Montrer que le point A d'abscisse $\frac{1}{2}$ est un centre de symétrie de la courbe de f
2. Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu
3. Justifier la continuité de f sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$
4. Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter le résultat trouvé
5. a) Calculer $f'(x)$ sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$ et sur $]1,+\infty[$. Déduire les variations de f sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

   b) Préciser l'équation de la tangente au point A
6. Montrer que A est un point d'inflexion de la courbe de f
7. Représenter graphiquement la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
8. a) Soit g la restriction de f à $\left[\frac{1}{2},1\right]$. Vérifier que g est bijective de $\left[\frac{1}{2},1\right]$ vers un intervalle J

   b) Représenter graphiquement dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe de g^{-1}

Sujet 9 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes f et préciser le domaine de primitivation :

1. $f(x)=x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$ / $f(x)=x\sqrt[3]{x-1}$
2. $f(x)=x^n(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$ $(n\in\mathbb{N})$ / $f(x)=\dfrac{2}{x^2+x+1}$
3. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ / $f(x)=\dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$.
4. $f(x)=\cos(x)\sin^2(x)$ / $f(x)=\arctan(x)+\dfrac{x}{1+x^2}$.
5. $f(x)=\dfrac{\arctan(x)+\dfrac{x}{1+x^2}}{\arctan^2(x)}$ / $f(x)=\dfrac{\cos(\arctan(x))}{1+x^2}$
6. $f(x)=\cos^{2n}(x)\sin^{2n+1}(x)$

Sujet 10 : Soit $f_n(x)=1+\sum_{k=2}^{k=n-1} kx^{k-1}$ *avec* $n\geq 3$ *et* $x\in\mathbb{R}$

1. Déterminer F la primitive de f qui vérifie $F(0)=0$
2. Déduire que : $\forall x\neq 1.\quad f_n(x)=\frac{(n-1)x^n-nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}$
3. a) Montrer que : $\forall n\geq 3.\ \exists!\, x_n\in]0,1].\quad f_n(x_n)=2$. Préciser x_3 et x_4
   b) Montrer que la suite (x_n) est strictement décroissante et déduire quelle est convergente
4. a) Montrer que : $\forall n\geq 3.\quad x_n\leq\frac{1}{2}$ et déduire $\lim (x_n)^n$
   b) Montrer que : $\forall n\geq 3.\quad 0<n(x_n)^n\leq\frac{n}{2^n}$
5. On pose $u_n=\frac{n}{2^n}\qquad n\geq 3$
   a) Calculer $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et déduire que : $\exists N\in\mathbb{N}.\quad n>N\ \Rightarrow\ \frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\frac{5}{6}$
   b) Montrer alors que $\lim u_n=0$. Déduire $\lim n(x_n)^n$
6. Calculer, à partir de ce qui précède $\lim (x_n)$

Sujet 11:

Soit $f(x)=\sum_{k=1}^{k=n} k\,C_n^k x^{k-1}$ *avec* $n\in\in-\{0,1\}$

1. Montrer que la fonction définie par : $F(x)=(1+x)^n$ est une primitive de f sur IR
2. Déduire, en fonction de n la somme $S_n=\sum_{k=1}^{k=n} k\,C_n^{k-1}$

Sujet 12:

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=Arctg\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$
   a) Calculer $f(0)$
   b) Montrer que : $\forall x\in IR.\quad f'(x)=\frac{-1}{2}\frac{1}{1+x^2}$
   c) Déduire une expression simple de $f(x)$
2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=Arctg\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ et $f(0)=0$
   a) Montrer que f est dérivable sur IR
   b) Montrer que : $\forall x\in IR.\quad f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$
   c) Déduire une expression simple de $f(x)$

Sujet 13 :

Soit $f(x)=\arctan\frac{2\sqrt{x}}{(1-x)}$ définie sur $I=[0,1[\cup]1;+\infty[$

1. Calculer les limite de f aux bornes de I et interpréter les résultats
2. Montrer que C_f admet au point A d'abscisse 0 une demi-tangente qu'on précisera
3. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[\cup]1;+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$
4. Représenter C_f dans un R.O.N
5. Montrer que : $\begin{cases} f(x)=2\,arctg(\sqrt{x}) & si \quad 0\le x<1 \\ f(x)=-\pi+2\,arctg(\sqrt{x}) & si \quad x>1 \end{cases}$

Sujet 14:

Soit la fonction f définie sur IR telle que f ne s'annule pas et est dérivable en 0 avec $f'(0)=1$

et $\forall(x,y)\in IR^2.\quad f(x+y)=f(x)f(y)$

1. Montrer que $f(0)=1$
2. Montrer que f est strictement positive sur IR
3. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}.\quad f(-x)=\frac{1}{f(x)}$ et déduire $f(x-y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
4. a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x\in IR.\quad f'(x)=f(x)$

   b) En déduire les variation de f sur $\mathbb{R}$
5. Soit $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

   a) Montrer que g est positive et déduire la branche infinie de la courbe de f en $+\infty$

   b) Déterminer la branche infinie de la courbe de f en $-\infty$
6. a) Déterminer la concavité de la courbe de f

   b) Représenter f graphiquement