

DL N° 1

Br-Rachid <http://www.sc-math.e-monsite.com>

Sujet

On définit la fonction f dans $I=[1, +\infty[$ par : $f(x)=\frac{2x+1}{2x}$

On définit la suite (u_n) par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

On pose $v_n=u_{2n}$ et $w_n=u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

I.

1. Vérifier que f est strictement décroissante sur I . Déduire les variations de $f \circ f$ sur I
2. Résoudre dans I les équations $f(x)=x$ et $f \circ f(x)=x$
3. Vérifier que : $f(I) \subset I$ et $f \circ f(I) \subset I$

II.

1. Calculer u_1 et u_2 et u_3 . Déduire que la suite (u_n) n'est pas monotone
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$
3. Montrer que la suite (u_n) n'est pas monotone

III. Suites extraites d'indices pairs ou impairs :

1. Montrer que $w_n=f(v_n)$ et $w_{n+1}=f \circ f(w_n)$ et $v_{n+1}=f \circ f(v_n)$
2. Montrer que la suite (v_n) est croissante et majorée par 2.
3. Montrer que la suite (w_n) est décroissante et minorée par 1
4. Calculer les limites de (v_n) et (w_n) .
5. Déduire que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
6. Quelle est leur limite commune ?