Sujet :

I. Une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle vérifie la proposition :

$$P: \ \forall a \in \mathbb{R}.\ \forall b \in \mathbb{R}.\quad (a<b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$$

1. Ecrire la contraposée de l'implication : $a<b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
2. Ecrire, à l'aide de quantificateurs et d'opérateurs logiques appropriés ce qu'est « f n'est pas croissante»

II. Applications :

1. Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}.\quad g(x)=3x^3-5$. Montrer que g est croissante
2. Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}.\quad h(x)=x^2+3$

   Calculer $h(-\sqrt{3})$ et $h(1)$ et déduire que g n'est pas croissante

Sujet :

A) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $\nabla_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^2$

1. Calculer ∇_1 et ∇_2
2. Calculer $A = \sum_{k=1}^{k=131} k^2$
3. Calculer en fonction de n la somme $B_n = \sum_{k=2}^{k=n-1} k^2$ pour tout $n \geq 3$

B) Approfondissement & Intégration :

On rappel que $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (*Résultat à connaître par l'élève*)

1. Calculer le produit suivant en fonction de n : $Q_n = \prod_{k=1}^{k=n} 3^{k^2}$
2. Calculer en fonction de n les sommes

   a) $S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} k^n$

   b) $R_n = \sum_{k=1}^{k=n} (3k^2-5k+3)$

Sujet :

On considère la proposition $P(n)$: $(\forall n \in \mathbb{N}.\quad n! \geq 2^n)$

1. Quelle est la valeur de vérité de $P(0)$ et de $P(1)$ et de $P(2)$ et de $P(3)$ et de $P(4)$
2. Montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 4$
3. Ecrire la négation de $P(n)$ et déterminer sa valeur de vérité

Sujet :

Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}.\ \forall n \in \mathbb{N}.\quad x^{n+1}-1=(x-1)(1+x+x^2+.......+x^n)$ (*Identité remarquable à connaître*)

1. a) Développer x^5-1 pour tout $x \in \mathbb{R}$

   b) Calculer les sommes : $\sum_{k=0}^{k=99} 2^k$ et $\sum_{k=0}^{k=99} 2^{3k}$
2. Calculer en fonction de n le produit : $\prod_{k=0}^{k=n} x^k$

Sujet :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$E(2x+\frac{1}{3})=-1 \quad \text{et} \quad 3E(2x+\frac{1}{3})=-1 \quad \text{et} \quad E(2x+\frac{1}{3})\leq -1 \quad \text{et} \quad E(2x+\frac{1}{3})<2$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2E(2x+\frac{1}{3})=2x-1$
3. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}.\ E\left(\frac{n}{3}\right)+E\left(\frac{n+1}{3}\right)+E\left(\frac{n+2}{3}\right)=n$
4. Montrer par disjonction des cas, que : $\forall n \in \mathbb{N}.\ E\left(\frac{n}{3}\right)+E\left(\frac{n+1}{3}\right)+E\left(\frac{n+2}{3}\right)=n$