DL N° 2

Br-Rachid http://www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 1 :

Partie 1 :

a) Montrer que : $\forall x \in IR.\ \forall n \in N.\quad \frac{E(10^n x)}{10^n} \leq x < \frac{E(10^n x)}{10^n} + \frac{1}{10^n}$

Dans la suite du sujet, on pose : $r_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ et $s_n = r_n + \frac{1}{10^n}$

b) Vérifier que $r_n \in \mathbb{Q}\quad (\forall n \in \mathbb{N})$ et que la suite ((r_n) converge vers x

Résultat : On vient de démontrer que tout nombre réel est limite d' une suite de nombres rationnels.

Partie 2 :

Soit f définie sur IR et continue en 0 avec: $\forall (x, y) \in IR^2.\quad f(x+y) = f(x) + f(y).$

On pose $f(1) = \mu$

1. Montrer que : $f(0) = 0$
2. Montrer que : $\forall (x, y) \in IR^2.\quad f(x-y) = f(x) - f(y)$. Déduire que f est impaire
3. Montrer que f est continue sur IR
4. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \in.\quad f(n) = \mu n$
5. Déduire de ce qui précède que : $\forall m \in Z.\quad f(m) = \mu m$
6. Montrer que : $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.\quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \mu \frac{p}{q}$
7. Montrer, en utilisant la partie1, que : $\forall x \in IR.\quad f(x) = \mu x$

Sujet 2 :

1- Soit f strictement monotone sur l'intervalle I de IR.

Montrer que f est injective sur I. Déduire que f est bijective de I vers $f(I)$.

2- Soit : $\begin{cases} f(x) = x & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 1 - x & ; \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}.$

Montrer que f est injective sans être strictement monotone. Conclure

3- Soit f continue et injective sur l'intervalle I. On se propose de démontrer que f est strictement monotone.

a) Vérifier que : « f non strictement monotone sur I » est équivalent à :

« $\exists (a, b) \in I^2.\quad a < b\ et\ f(a) \geq f(b)$ et $\exists (c, d) \in I^2.\quad c < d\ et\ f(c) \leq f(d)$ »

b) On considère la fonction définie sur $[0,1]$ par : $g(t) = f((1-t)a + tc) - f((1-t)b + td)$

c) Vérifier que $((1-t)a + tc) < ((1-t)b + td)\qquad \forall t \in [0,1]$

d) Montrer que g est continue sur $[0,1]$ puis calculer $g(0)$ et $g(1)$

e) Déduire que f n'est plus injective puis conclure.