DL N° 3

Br-Rachid http://www.sc-math.e-monsite.com

Sujet :

Soit f définie sur $]0,+\infty[$ et continue en 1 et vérifiant : $\forall x>0. \forall y>0. \quad f(xy)=f(x)+f(y)$

1. Dans cette partie, f est supposée être continue en 1
   a) Montrer que $f(1)=0$
   b) Montrer que : $\forall x>0. \forall y>0. \quad f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$
   c) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{Z}. \forall x>0. \quad f(x^m)=mf(x)$
   d) Montrer que : $\forall x>0. \forall r \in Q. \quad f(x^r)=rf(x)$
   e) Montrer que pour tout a nombre réel, f est continue en a
2. Dans cette partie, f est, en plus, supposée être dérivable en 1 et $f'(1)=1$
   a) Ecrire l'équation de la tangente à C_f au point $A(1,0)$
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et déduire que f est dérivable en tout point a de IR^{+*} (Prendre $t=\frac{x}{a}$)
   c) Déduire que : $\forall x>0. \quad f'(x)=\frac{1}{x}$. Déduire la monotonie de f sur $]0,+\infty[$
   d) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ dans $]0,+\infty[$. Déduire le signe de f
   f) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$

      Déduire par le changement de variable $t=\frac{1}{x}$ que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et interpréter ces résultats
   g) Montrer que f est bijective de $]0,+\infty[$ vers un intervalle à déterminer
   h) Montrer que : $\forall x \geq 1. \quad f(x) \leq 2\sqrt{x}-2$ et déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter ce résultat graphiquement
   l) Représenter graphiquement la courbe de f et celle de sa réciproque f^{-1}
3. Quelques applications :
   a) Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

      $h(x)=f(f(x))$ et $k(x)=f(\arctan(x))$ et $l(x)=\arctan(f(x))$
   b) Donner la forme générale des primitive des fonctions suivantes :

      $u(x)=\frac{1}{2x+5}$ et $v(x)=\frac{x}{1+x^2}$ et $w(x)=\tan(x)$ et $\frac{2x+1}{x^2+2x+2}$
   c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*. \ \exists! u_n \in [1,+\infty[. \quad u_n+\ln(u_n)=n$

      Montrer que la suite (u_n) est croissante

      Montrer, par l'absurde que (u_n) n'est pas majorée et déduire la limite de (u_n)