DL3 : Généralités sur le fonctions – Suites numériques - SI

Br-Rachid www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 1:

Soit la suite définie par : $u_0=-1$ *et* $u_1=1$ *et* $u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{-1}{4}u_n$ $(n\in\mathbb{N})$

On considère les suites : $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$ **et** $w_n=2^n u_n$ **pour tout** $n\in\mathbb{N}$

1. **Montrer que** (v_n) **est géométrique et calculer** v_n **en fonction de** n
2. **Montrer que** (w_n) **est arithmétique et calculer** w_n **en fonction de** n
3. **Calculer** u_n **en fonction de** n
4. **Calculer, en fonction de n, la somme** $S_n=\sum_{k=1}^{k=n} u_k$

Sujet 2:

Partie 1 : **On considère la fonction** $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$ **et l'intervalle** $I=\left[0,\frac{1}{2}\right]$

1- a) **Montrer que** $\forall x\in\mathbb{R}.\quad 0\le f(x)\le\frac{1}{2}$ **.**

b) **Quelle relation en déduire entre les ensembles** I **et** $f(I)$ **?**

2- a) **Montrer que** $\frac{1}{2}$ **est une valeur maximale absolue de** f

b) **Montrer que** 0 **n'est pas une valeur minimale de** f

3- **Ecrire** f **sous forme d'un composé de trois fonctions usuelles**

4- **Montrer que** f **et strictement décroissante sur** $\mathbb{R}^+$ **. Déduire sa monotonie sur** $\mathbb{R}^-$

5- **Montrer que** f **n'a pas de valeur minimale sur** $\mathbb{R}$

Partie 2 : **On considère la suite** (u_n) **donnée par :** $u_0=0$ *et* $u_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1+u_n^2}}$ $(n\in\mathbb{N})n$

1- **Calculer** u_0 **et** u_1 **et** u_2 **et** u_3 **. Déduire que la suite** (u_n) **n'est pas monotone**

2- **Montrer que :** $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 0\le u_n\le\frac{1}{2}$

3- **On pose** $w_n=u_{2n}$ *et* $v_n=u_{2n+1}$ **pour tout** $n\in\mathbb{N}$

a) **Montrer que** $v_n=f(w_n)$ **et** $v_{n+1}=fof(v_n)$ **et** $w_{n+1}=fof(w_n)$ **pour tout** $n\in\mathbb{N}$

b) **Montrer que** (w_n) **est croissante et déduire que** (v_n) **est décroissante**

Sujet 3:

Soient $u_0=2$ **et** $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ **et** $v_0=1$ **et** $v_{n+1}=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$ **pour tout** $n\in\mathbb{N}$

1. **Vérifier que :** $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$.
2. **Montrer que :** $\forall n\in\mathbb{N}\ .\quad 0<v_n<u_n$
3. **Montrer que les suites** $(u)_n$ **et** (v_n) **sont monotone et déterminer leurs monotonies.**
4. a) **Montrer que :** $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_{n+1}-v_{n+1}<\frac{1}{2}(u_n-v_n)$.

   b) **Déduire que :** $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n-v_n<\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. **Montrer que la suite** (u_nv_n) **est constante.**