DL3 : Généralités sur le fonctions – Suites numériques - SI

Br-Rachid www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 1: Soit la suite définie par : $u_0=-1$ *et* $u_1=1$ *et* $u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{-1}{4}u_n \quad (n\in\mathbb{N})$

On considère les suites : $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$ et $w_n=2^n u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que (v_n) est géométrique et calculer v_n en fonction de n
2. Montrer que (w_n) est arithmétique et calculer w_n en fonction de n
3. Calculer u_n en fonction de n
4. On poe $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a) Montrer que $S_n=\frac{1}{2^n}-2+3\sum_{k=0}^{k=n}\frac{k}{2^k}$ (Utiliser l'expression explicite de u_n)

   b) Par télescopage, Montrer que $u_{n+2}-u_1=\frac{-1}{4}S_n$ et déduire S_n en fonction de n

   c) Calculer alors $\sum_{k=0}^{k=n}\frac{k}{2^k}$ en fonction de n

Sujet 2:

Partie 1 : On considère la fonction $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$ et l'intervalle $I=\left[0,\frac{1}{2}\right]$

1- Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}.\quad 0\le f(x)\le\frac{1}{2}$. Déduire que $f(I)\subset I$

2- Montrer que $\frac{1}{2}$ est une valeur maximale absolue de f . 0 est-il un extremum f ?

3- Ecrire f sous forme d'un composé de trois fonctions usuelles

4- Montrer que f et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Déduire sa monotonie sur $\mathbb{R}^-$

Partie 2 : On considère la suite (u_n) donnée par : $u_0=0$ *et* $u_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1+u_n^2}} \quad (n\in\mathbb{N})$

1- Calculer u_0 et u_1 et u_2 et u_3 . Déduire que la suite (u_n) n'est pas monotone

2- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 0\le u_n\le\frac{1}{2}$

3- On pose $w_n=u_{2n}$ *et* $v_n=u_{2n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a) Montrer que $v_n=f(w_n)$ et $v_{n+1}=fof(v_n)$ et $w_{n+1}=fof(w_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   b) Montrer que (w_n) est croissante et déduire que (v_n) est décroissante

Sujet 3: Soient $u_0=2$ et $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_0=1$ et $v_{n+1}=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$.
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ .\quad 0<v_n<u_n$
3. Montrer que les suites $(u)_n$ et (v_n) sont monotone et déterminer leurs monotonies.
4. a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_{n+1}-v_{n+1}<\frac{1}{2}(u_n-v_n)$.

   b) Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n-v_n<\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Montrer que la suite $(u_n v_n)$ est constante.