

DL N° 4

Br-Rachid <http://www.sc-math.e-monsite.com>

Sujet 1:

Partie A

$$\text{Soit : } \begin{cases} f(x) = x \ln|x| - (x-1) \ln|x-1| & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la droite : $(D): x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de C_f
2. Etudier la continuité de f en 1
3. Etudier la dérivabilité de f en 1
4. Déterminer la branche infinie de C_f en $+\infty$
5. Montrer que : $\forall x \in I$. $f'(x) = \ln\left(\frac{x}{|x-1|}\right)$ avec $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup]1, +\infty[$
6. Donner le tableau des variations de f sur $I \cup \{1\}$ et déduire le signe de f sur I
7. Représenter C_f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie B

$$\text{Soit : } \begin{cases} g(x) = \frac{\ln|x-1|}{\ln|x|} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité puis la dérivabilité de g en 0
- 2) Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition
- 3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} -]1, 0, 1[$. $g'(x) = \frac{f(x)}{x(x-1)(\ln|x|)^2}$.
- 4) Poser le tableau des variations de g
- 5) Déterminer l'intersection $C_g \cap (Ox)$
- 6) Représenter C_g dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Sujet 2:

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\arctan(p+1) - \arctan(p)) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
2. Montrer que : $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan \frac{1}{p^2 + p + 1}$
3. On considère la suite : $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} \arctan \frac{1}{p^2 + p + 1}$ ($n \in \mathbb{N}$)
 - a) Calculer S_0
 - b) Montrer que : $S_n = \arctan(n+1)$
 - c) Calculer la limite de S_n