Devoir de Mathématiques

Br-Rachid www.sc-math.e-monsite.com

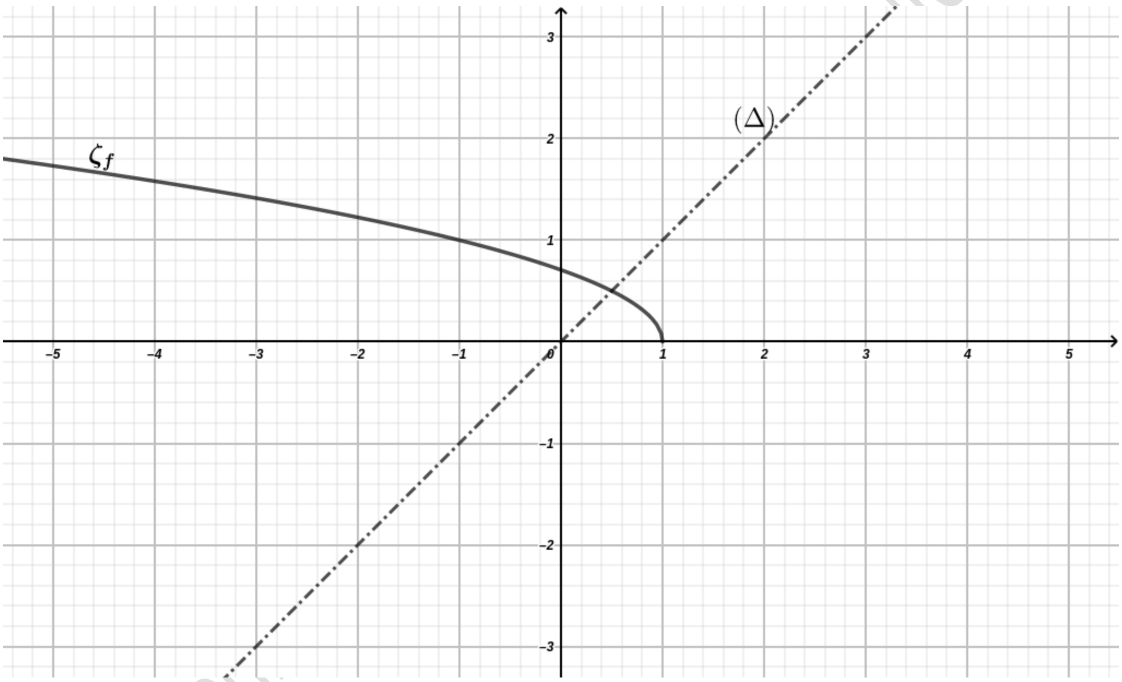
Sujet 1:

Partie 1 : **On considère la fonction** $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$ **et l'intervalle** $I=[-1,1]$

ζ_f **est la courbe représentative de** f **(Trait plein et continu) dans un repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. **Déterminer le domaine de définition** D_f **de** f **, et calculer** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ **et** $f(0)$ **et** $fof(0)$
2. **Calculer les limites** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **et** $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{f(x)}{x-1}$
3. **Montrer que** f **est une fonction strictement décroissante sur** D_f
4. **Montrer que** $f(I)=[0,1]$
5. **Déterminer en extension l'ensemble** $\zeta_f\cap(\Delta)$ **avec** (Δ) **la première bissectrice du repère**

Ci-dessous est donnée la courbe représentative ζ_f **de** f **dans** $(O,\vec{i},\vec{j})$



6. **Déterminer graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation** $f(x)<x$
7. **Représenter (Couleur verte) dans** $(O,\vec{i},\vec{j})$ **la fonction définie sur** $]-1,1]$ **par** $g(x)=-f(x)$
8. **Représenter, d'une couleur rouge et dans le même repère** $(O,\vec{i},\vec{j})$ **la fonction définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $h(x)=g(x)$ **si** $x\in]-1,1]$ **et** h **est périodique de période** 2
9. **Montrer que** f **est bijective de** $]-\infty,1]$ **vers** $[0,+\infty[$ **. Définir la réciproque** f^{-1}
10. **a) Montrer que :** $\forall\, x\in D_{f.}$ $M_{(x,y)}\in\zeta_f \Leftrightarrow N_{(y,x)}\in\zeta_f^{-1}$

    b) Montrer que le milieu du segment $[MN]\in(\Delta)$ **et que** $\overrightarrow{MN}$ **et** $\vec{i}+\vec{j}$ **sont orthogonaux**

    c) Quelle conclusion en déduire à propos des positions relatives des courbes ζ_f **et** ζ_f^{-1} **?**

    d) Représenter ζ_f **et** ζ_f^{-1} **dans un même repère orthonormé (Schéma différent du précédant)**

Partie 2 : **Soit :** $u_0 \in I$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1-u_n}{2}}$ $(n \in \mathbb{N})$

1. **Montrer que si** $u_0 = \dfrac{1}{2}$ **alors la suite** (u_n) **est constante**

Dans toute la suite du sujet, On prend $u_0 = 0$

2. **a) Calculer** u_1 **et** u_2 **. Déduire que la suite** (u_n) **n'est pas monotone**

   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}.\quad 0 \leq u_n \leq 1$

3. **On considère la suite donnée par :** $\forall n \in \mathbb{N}.\quad p_n = u_{2n}$

   a) Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bornée**

   b) Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est strictement croissante .**

   (N.B: $\forall n \in \mathbb{N}.\quad p_{n+1} = fof(p_n)$ **avec** $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$ **et que** fof **est strictement croissante)**

Partie 3: **Dans ce qui suit, on prend** $u_0 = \sin(\alpha_0)$ **avec** $\alpha_0 \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{6}\right\}$

1- **Montrer que :** $\forall x \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right].\quad f(sinx) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$ **avec** $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$

2- **Montrer par récurrence que :**

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ \exists ! \alpha_n \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].\quad u_n = \sin(\alpha_n) \quad \textbf{et que} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_n}{2}$$

3- **On prend pour la suite du sujet** $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{12}$ **. Considérons la suite** $v_n = \dfrac{\pi}{6} - \alpha_n$

   a) **Calculer la valeur numérique de** u_0 **et celle de** u_1

   b) **Montrer que la suite** (v_n) **est géométrique**

   c) **Calculer** v_n **en fonction de** n

   d) **Montrer que** $p_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\,\dfrac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+2}}\right)$