DS N° 4

Br-Rachid http://www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 1:

Partie 1 : On considère la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x+1}$

Soit C_f la courbe de f dans un RON du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

1. Déterminer les branches infinies de C_f
2. Poser le tableau des variations de f
3. Etudier la position de C_f par rapport à la droite $(y=x)$ puis représenter C_f
4. a) Montrer que f est bijective de IR vers un intervalle J à déterminer
   b) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ et représenter la courbe de f^{-1}
5. a) Calculer $\int_0^1 f(t)dt$
   b) Déduire l'aire du domaine (Δ) limité par C_f et les droites $(x=0)$ et $(x=1)$ et (Ox)
6. a) Déterminer a et b et c et d tels que : $\frac{t^3}{(t+1)^2}=at+b+\frac{c}{t+1}+\frac{d}{(1+t)^2}$
   b) Calculer le volume du solde (∇) obtenu par une rotation complète de (Δ) autour de (Ox)

Partie 2 : Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in IR^{-*}$, on pose $F_n(x)=\int_x^0 \frac{e^{nt}}{e^t+1}dt$

1. Calculer $F_1(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} F_1(x)$ puis calculer $F_2(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} F_2(x)$
2. Montrer que : $\forall x<0. \forall n\geq 1.$ $F_{n+1}(x)+F_n(x)=\frac{1-e^{nx}}{n}$
3. Montrer par récurrence que $F_n(x)$ admet une limite R_n quand x tend vers $-\infty$
4. a) Montrer que $\forall t<0.$ $2e^t\leq e^t+1\leq 2$
   b) Déduire que $\forall x<0.$ $\forall n>1.$ $\frac{1-e^{nx}}{2n}\leq F_n(x)\leq\frac{1-e^{(n-1)x}}{2(n-1)}$
   c) Déduire que : $\forall n>1.$ $\frac{1}{2n}\leq R_n\leq\frac{1}{2(n-1)}$ et calculer $\lim R_n$

Sujet 2:

Dans le plan complexes rapporté à un repère orthonormé directe, on considère les points A et B et M d'affixes respectifs $2i$ et i et z. f est l'application définie par : $f(z)=\frac{iz+2}{z-i}$

Partie1 :

1. Montrer que : $\forall z\in C-\{i\}.$ $AM=BM\times|f(z)|$
2. Montrer que : $\forall z\in C-\{i,2i\}.$ $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})\equiv arg\left(f(z)-\frac{\pi}{2}\right)\ [2\pi]$
3. Etudier et déterminer la nature des ensembles :
   a) $E=\{M\in P. \quad |f(z)|=1\}$ b) $F=\{M\in P. \quad f(z)\in i\mathbb{R}^{**}\}$ c) $F=\{M\in P. \quad f(z)\in\mathbb{R}^{+*}\}$
4. Mo_ntrer que : $\forall z\in C-\{i\}.$ $\begin{cases} |f(z)-i||z-i|=1 \\ arg(f(z)-i)+arg(z-i)\equiv 0[2\pi]\end{cases}$
5. Montrer que si M appartient au cercle $C_{(B,r)}$, alors $M'_{f(z)}$ appartient à un cercle à déterminer

Partie2 :

1- Montrer que f admet deux points fixes u et v (On choisira u tels que $R_e(u)=1$).

2- a) Soient les points C_u et D_v. Montrer que : $\forall z\in C-\{i,u,v\}.$ $\frac{f(z)-u}{z-u}\div\frac{f(z)-v}{z-v}=-1$
   b) Montrer que si M et D et C sont alignés alors M et D et C et M' le sont aussi
   c) Montrer que si M et D et C ne sont pas alignés alors M et D et C et M' sont cocycliques

Partie3 : On pose $z=i+e^{i\theta}$ avec $\frac{-\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$. Déterminer les modules et des arguments de z et de $f(z)$