## *DL N° 6*

*Br-Rachid* http://www.sc-math.e-monsite.com

### Sujet 1 :

Soit la fonction $u$ dérivable sur $IR$ *et définie par* : $\begin{cases} u'(x)-u(x)=2\int_0^x u(t)\,dt & si \quad x\neq 0 \\ u(0)=u'(0)=1 \end{cases}$

1. Montrer que $u$ deux fois dérivable sur $IR$
   a) Montrer que $u$ est solution de l'équation différentielle $y''-y'-2y=0$ (E)
   b) Déduire que : $\forall x\in IR.\quad u(x)=\frac{1}{3}(2e^{2x}+e^{-x})$
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=3\,km$. Représenter graphiquement $C_u$
   a) Calculer les surfaces du domaine $(\Delta_1)=\{M(x,y)\in P.\quad 0\le x\le 1 \quad et \quad 0\le y\le u(x)\}$
   b) Calculer le volume du solide $(\nabla)$ obtenu par une rotation complète de $(\Delta_1)$ autour de l'axe $(O,\vec{i})$
   c) Calculer le volume du solide $(\beth)$ obtenu par une rotation complète de $(\Delta_1)$autour de l'axe $(O,\vec{j})$
3. Soit : $u_n=\int_0^1 \frac{u(t)}{1+nt}dt$ avec $n\in\mathbb{N}$
   a) Montrer que $(u_n)$ est bornée et est décroissante
   b) Déduire que $(u_n)$ est convergente et que $\lim u_n=0$
4. Soit : $v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{4e^{3\frac{k}{n}}-1}{2e^{3\frac{k}{n}}+1}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. Vérifier que : $v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{u'(\frac{k}{n})}{u(\frac{k}{n})}$. En déduire que $(v_n)$ est convergente et calculer sa limite

### Sujet 2 :

Soit $f_n(x)=\int_0^x \frac{1}{(e^t+e^{-t})^n}dt$ avec $(n\in\mathbb{N})$ $et$ $(x\in\mathbb{R})$

1. Calculer $f_1(x)\, et\, f_2(x)$ et calculer $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)\; et\; \lim_{x\to+\infty} f_2(x)$
2. a) Soit $(\Delta_1)=\left\{M(x,y)\in P.\quad 0\le x\le \ln(\sqrt{3}) \quad et \quad 0\le y\le \frac{1}{e^t+e^{-t}}\right\}$. Calculer la surface de $(\Delta_1)$
   b) Calculer le volume du solide généré par une rotation complète de $(\Delta_1)$ autour de $(Ox)$
3. Vérifier que : $\forall n\ge x.\quad \frac{4}{(e^t+e^{-t})^n}=\frac{1}{(e^t+e^{-t})^{n-2}}-\frac{(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^n}$
4. a) $g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^{n-1}}$ et $h(x)=\frac{1}{(e^x+e^{-x})^{n-2}}-(n-1)\frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^n}$
   b) Montrer que : $g(u)=\int_0^u h(x)\,dx \qquad (\forall u\in IR)$
   c) Déduire : $4(n-1)f_n(x)=(n-2)f_{n-2}(x)+\frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^{n-1}}$
5. a) Montrer que : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^{n-1}}=0$
   b) Montrer par récurrence que $f_n(x)$ admet une limite $\rho_n$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$
   c) Calculer $\rho_n$ en fonction de $\rho_{n-2}$ pour tout $n\ge 3$
6. Calculer $\rho_{2n+1}$ en fonction de $n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

**DL N° 6**

Br-Rachid http://www.sc-math.e-monsite.com

**Sujet 3 ;**

**Partie A :**

On pose $F(x)=\int_{0}^{x} Arctg(t)dt$

1. Par une intégration par partie, montrer que : $F(x)=xArctg(x)-\ln\sqrt{1+x^2}$
2. Par une intégration par changement de variable, montrer que : $F(x)=xArctg(x)+\ln(\cos(Arctg(x)))$
3. a) Déduire $\cos(Arctg(x))$ en fonction de $x$

   b) Montrer que $\sin(Arctg(x))\times Arctg(x)\geq 0$ puis déduire $\sin(Arctanx)$ en fonction de $x$

**Partie B :**

Soit $\varphi(t)=t+Arctg(t)$ définie sur $\mathbb{R}$

1. Etudier $\varphi$ et représenter graphiquement $C_\varphi$
2. a) Calculer la surface du domaine $\Delta=\{M(x,y)\in P\, 0\leq x\leq 1\, et\, 0\leq y\leq\varphi(t)\}$

   b) Calculer le volume du solide $(S)$ obtenu par une rotation complète autour de $(Oy)$

**Partie C :**

Soit $G(x)=\int_{x}^{2x}\frac{1}{\varphi(t)}dt \qquad x\in IR^*$

1. Déterminer $D_G$ et montrer que $G$ est paire
2. Justifier la dérivabilité de $G$ sur $]0,+\infty[$
3. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $u(x)=2\varphi(x)-\varphi(2x)$ sur $[0,x]$ déterminer la monotonie de G sur $IR^{+*}$
4. Montrer que : $\forall t>0.\quad \frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}<\frac{1}{\varphi(t)}<\frac{1}{t}$ et déduire alors $\lim_{x\to+\infty} G(x)$
5. a) Vérifier que : $\forall u\in IR.\quad 1-u^2<\frac{1}{1+u^2}<1$ et déduire que $\forall t>0.\quad t-\frac{1}{3}t^3<Arctg(t)<t$

   b) Déduire que : $\lim_{t\to 0^+}\frac{Arctg(t)-t}{t^2}=0$ et que : $\forall t\in[0,1].\quad \frac{1}{2t}<\frac{1}{\varphi(t)}<\frac{3}{t(6-t^2)}$
6. Vérifier que : $\forall t\in]0,1].\quad \frac{1}{6-t^2}<\frac{1+t^2}{6}$ et déduire que $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right].\quad \frac{1}{2}\ln 2\leq G(x)\leq\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}x^2$
7. Calculer $\lim_{x\to 0^+} G(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} G(x)$. Interpréter ces résultats graphiquement
8. a) Calculer $\lim_{x\to 0^+}\frac{G(x)-\frac{1}{2}\ln 2}{x}$

   b) Représenter graphiquement $C_G$