DL N° 7

Br-Rachid http://www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 1 : On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}+1 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}+1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Partie 1 :

1. Montrer que $J^2=J$ et déduire que J n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$
2. Montrer que $A^n=\begin{pmatrix}\frac{2^n-1}{3}+1 & \frac{2^n-1}{3} & \frac{2^n-1}{3}\\ \frac{2^n-1}{3} & \frac{2^n-1}{3}+1 & \frac{2^n-1}{3}\\ \frac{2^n-1}{3} & \frac{2^n-1}{3} & \frac{2^n-1}{3}+1\end{pmatrix}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Partie 2 : Soit $V=\{(xI+yJ)\in M_3(\mathbb{R}).\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que V est un sous espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$ et que (I,J) en est une base de V
2. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose $A(t)=I+(2^t-1)J$. Soit l'ensemble $H=\{A(t).\quad t\in\mathbb{R}\}$
   a) Montrer que H est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}),\times)$
   b) Montrer que l'application $t\rightarrow A(t)$ définie un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(H,\times)$
   c) Déduire la structure de $(H,\times)$ et ses éléments caractéristiques

Partie 3 : Soit $E=\{(xI+yJ)\in M_3(\mathbb{R}).\quad (x,y)\in\mathbb{Z}^2\}$.

1. a) Montrer que $(E,+)$ est un groupe commutatif
   b) Montrer que $(E,+,.)$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
2. a) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire
   b) Montrer que $(E,+,\times)$ n'est pas un corps
3. Soit G l'ensemble des inversibles de E . Montrer que $G=\{I,-I,-I+2J,I-2J\}$

Sujet 2 : (Bacc Norm 2016)

Première partie: Soit $(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que le nombre premier 173 divise a^3+b^3

1. En observant que $171=3\times 57$, montrer que : $a^{171}\equiv -b^{171}[173]$
2. Montrer que " 173 divise a " si et seulement si " 173 divise b "
3. On suppose que 173 divise a . Montrer que 173 divise $a+b$
4. On suppose que 173 ne divise pas a
   a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $a^{172}\equiv b^{172}[173]$
   b) Montrer que $a^{171}(a+b)\equiv 0[173]$ et déduire que $a+b\equiv 0[173]$

Deuxième partie: Soit dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation (E) : $x^3+y^3=173(xy+1)$

Soit (x,y) une solution de (E) . On pose $x+y=173k$ avec $k\in\mathbb{N}^*$

1. Vérifier que $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$
2. Montrer que $k=1$ puis résoudre l'équation (E)