Produit Scalaire

Br-Rachid www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 1:

1. Ecrire en extension le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ suivant : $F=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right) \ / \ k\in Z\right\}$

2. Ecrire en compréhension le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ donné par : $G=\{3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23\}$

3. Ecrire en compréhension les sous-ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ de IR

Sujet 2:

Soit : $B=\left\{n\in\mathbb{N} \ / \ \frac{3n+15}{n+1}\in\mathbb{N}\right\}$

1. a) Donner un élément de B
   b) Vérifier que 4 n'appartient pas à B
2. Déterminer l'entier naturel p tel que : $\frac{3n+15}{n+1}=3+\frac{p}{n+1}$
3. Déduire l'écriture de B en extension

Sujet 3:

Soient les ensembles : $A=\left\{\frac{n+1}{2^n} \ / \ n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right\}$ et $B=\left\{\frac{2n+1}{4^n} \ / \ n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right\}$ et $C=\left\{\frac{3}{4},\frac{3}{16},\frac{7}{64}\right\}$

1- Donner Deux éléments de chacun des ensembles A et B

2- Montrer que $B\subset A$

3- Par un contre-exemple montrer que $A\neq B$

4- Vérifier que $C\subset A$. A-t'on $C\subset B$?

5- Determiner $P(C)$

Sujet 4:

les ensembles A et B sont définie par : $A=\left\{x\in IR \ / \ \frac{3x+3}{3x+2}\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{x\in IR \ / \ \frac{1}{3x+2}\in\mathbb{Z}\right\}$

1. Montrer que $\frac{-1}{3}\in A$ et que $\frac{-2}{3}\notin A$ et que $0\notin A$
2. Vérifier que : $\frac{3x+3}{3x+2}=1+\frac{1}{3x+2}$ puis montrer que : $A=B$
3. Montrer que : $A=\left\{\frac{1-2p}{3p} / p\in\mathbb{Z}^*\right\}$

Sujet 5:

Déterminer en extension les ensembles A et B tels que vérifiant :

$$A\cup B=\{1,2,3......,11\} \quad \textbf{et} \quad A\cap B=\{4,5,6,11\} \quad \textbf{et} \quad A\setminus B=\{7,8,9,10\}$$

Sujet 6:

Soient les ensembles $A=\left\{x\in IR/ \ \left|x-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{4}\right\}$ et $B=\left\{x\in IR/ \ |x-1|\leq\frac{1}{2}\right\}$

1. Montrer que $A\cap B=\varnothing$
2. Déterminer l'ensemble $(A\cup B)\cap[0,1]$

Br-Rachid --- www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 7:

1- Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}. \quad (3m\, pair) \Longleftrightarrow (m\, pair)$

2- Soient : $A=\{2n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ et $B=\{x \in \mathbb{R} \ / \ \exists n \in \mathbb{N}. \quad x=3n\}$ et $C=\{6p \ / \ p \in \mathbb{N}\}$

Montrer que : $C=A \cap B$

Sujet 8:

Soients $A=\left\{\dfrac{2k+6}{2k+1} \ / \ k \in \mathbb{N}\right\}$ et $B=\left\{\dfrac{5k+3}{8k+9} \ / \ k \in \mathbb{N}\right\}$.

1- Montrer que : $A \cap B=\varnothing$

2- Déterminer en extension les ensembles $A \cap \mathbb{Z}$ et $\mathbb{N} \cap B$

Sujet 9:

On considère les ensembles : $E=\{x \in IR \ / \ x^4 \leq 4^4\}$ et $F=\{x \in IR \ / \ (x \neq 2) \Longrightarrow (x>3)\}$

- Ecrire F sous la forme de la réunion de deux parties de IR
- Montrer que E est un intervalle à déterminer
- Déterminer les ensembles C_{IR}^{E} et $E \cap F$ et $E \cup F$

Sujet 10:

Soient les droites du plan $(D): x-y=0$ et $(L): 2x-y=1$

1- Déterminer en extension $(D) \cap (L)$

2- Ecrire $(D) \cup (L)$ en compréhension

Sujet 11:

Soient $E=\{(x,y) \in IR^2. \quad x^2+2y^2+3xy-x-2y=0\}$ et $F=\{(x,y) \in IR^2. \quad x+2y=0\}$

1- Montrer que $(1,0) \in E \setminus F$

2- Montrer que F est inclus dans E strictement

3- Déterminer les réels a et b et c qui vérifient : $x^2+2y^2+3xy-x-2y=(x+2y)(ax+by+c)$

4- Déduire un ensemble G tel que : $E=F \cup G$

5- Déterminer $G \cap F$

Sujet 12:

Soit $E=\{(x,y) \in IR^2. \quad x^2+y^2=11\}$

1. Vérifier que $(\sqrt{11},0)$ et $(0,\sqrt{11})$ appartiennent à E
2. Montrerb, par l'absurde , que E ne peut s'écrire sous forme d'un produit cartésien de deux parties de IR

Sujet 13:

On considère le sous ensemble A de IR^2 formé des couples (x,y) tels que : $x^3+y^3<1$ et $x+y>1$.

1. Montrer que : $A \neq \varnothing$
2. Montrer que : $\forall (x,y) \in A. \quad x^3+(1-x)^3<1$. Déduire que $0<x<1$
3. Montrer de même que $0<y<1$ et déduire que : $A \, C \,]0,1[\times]0,1[$
4. Montrer par un contre-exemple que : $A \neq]0,1[\times]0,1[$.

Br-Rachid --- www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 14:

A et B et C sont des parties d'un ensemble non vide E

3- Montrer que : $A\cup B=A\cap B \Longrightarrow A=B$

4- Montrer que : $B\subset A \Longrightarrow C_E^A \subset C_E^B$

5- Montrer que : $\begin{cases} A\cup B=A\cup C \\ A\cap B=A\cap C \end{cases} \Longrightarrow B=C$

6- Montrer les deux lois de Morgan : $C_E^{A\cup B}=C_E^A\cap C_E^B$ et $C_E^{A\cap B}=C_E^A\cup C_E^B$

Sujet 15:

A et B et C sont des parties d'un ensemble non vide E

1- Montrer que : $A\subset B \Longrightarrow (A\setminus C)\subset(B\setminus C)$

2- Montrer que : « $(B\subset C)$ et $(C=A\setminus B)$ » $\Longrightarrow (A=B\cup C)$

3- Quelles relations entre A et B et C dans chacun des cas suivants :

1. $A\setminus B=A$
2. $A\setminus B=\varnothing$
3. $A\setminus B=E$

Sujet 16:

1. Soient A et B et C et D des éléments de $P(E)$ avec E un ensemble non vide

1. Montrer que $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

2. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que :

$$\overline{A\times B}=(\overline{A}\times B)\cup(A\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\overline{B})$$

2. Soient $A=\{a,1\}$ et $B=\{0,b,2\}$ et $C=\{1,x,y\}$

1- Former l'ensemble des parties de $A\times B$

2- Former l'ensemble $A\times B\times C$

Sujet 17:

Soit E un ensemble non vide et soit $x\in E$. On considère les ensembles :

$M=\{A\in P(E)/x\in A\}$ et $N=\{A\in P(E)/x\notin A\}$

- Montrer que : $M\cap N=\varnothing$
- Montrer que : $P(E)=M\cup N$

(On dit que M et N forment une partition de $P(E)$)

Br-Rachid --- www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 18:

Dans cet exercice, E est un ensemble non vide

Partie A

Soient $A, B \in P(E)$. On considère dans $P(E)$ l'équation : $A \cup X = B \qquad (1)$

1. Montrer qu'une condition nécessaire pour que (1) admette des solutions dans $P(E)$ est $A \subset B$.

   Dans la suite de l'exercice, on suppose que $A \subset B$.

2. a) Montrer que si $A \cup X = B$ alors $X \subset B$

   b) Montrer que si $A \cup X = B$ alors $\left(B \cap C_E^A\right) \subset X$

   c) Déduire que : $\left(B \cap C_E^A\right) \subset X \subset B$

   d) Ecrire l'ensemble S des solutions de (1)

3. Application : On prend $E = \{a, 2, b, 3\}$ et $A = \{a\}$ et $B = \{a, 2, b\}$. Ecrire S dans ce cas

Partie B

Soient $A, B \in P(E)$. On considère dans $P(E)$ l'équation : $A \cap X = B \, (2)$

1. Déterminer une condition nécessaire pour que (2) admette des solutions dans $P(E)$

   Dans la suite, on suppose que : $B \subset A$

2. Montrer que : $A \cap X = B \Longrightarrow B \subset X \subset (B \cup A)$

3. Ecrire l'ensemble des solutions de (2)

Partie C

Résoudre dans $P(E)$, en précisant les conditions nécessaires, les équations suivantes :

1. $A \backslash X = B \qquad (3)$
2. $X \backslash A = B \qquad (4)$
3. $A - X = X - A \qquad (5)$

Partie D

4. Montrer que : $A \Delta (A \Delta Y) = Y . \qquad \forall Y \subset E$
5. Résoudre dans $P(E)$: $\quad A \Delta X = B$

Sujet 19:

A et B étant des parties d'un ensemble non vide E, on définit la différence symétrique par :

$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

- Montrer que : $A \Delta B = (A \cup B)(A \cap B)$
- Montrer que : $A \Delta B = B \Delta A$
- Montrer que : $A \Delta B = \phi \Leftrightarrow A = B$
- Montrer que : $(A \Delta B) \cap C = (A \Delta C) \cap (B \Delta C)$

Br-Rachid --- www.sc-math.e-monsite.com