Chapitre : Equations différentielles linéaires (1 et 2[eme] ordre)

Br-Rachid *http://www.sc-math.e-monsite.com*

Sujet 1:

1. On considère l'équation différentielle de premier ordre : $(E): y' = 2y$.

   a) Vérifier que la fonction nulle y_0 et les fonctions $y_1 = e^{2x}$ et $y_2 = -5e^{2x}$ sont solution de (E)

   b) Montrer que $y_1 + y_2$ et αy_1 sont également solutions de l'équation (E) $(\forall \alpha \in IR^*)$

   c) Déterminer y la solution générale de (E)

2. On suppose qu'à part la fonction nulle, toute autre solution de (E) ne s'annule en aucun point.

   Trouver les solutions de (E) en utilisant la dérivée logarithmique

3. On considère l'équation différentielle de premier ordre : $(F): y' = 2y + 3$

   a) Montrer que $(F) \Leftrightarrow ((G): z' = 2z)$ avec z une fonction à déterminer

   b) Déterminer alors y la solution générale de (F)

   c) Déterminer la solution y de (F) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1$

Sujet 2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes : y-2y'= / $y''' - 2y'' = 0$

Sujet 3 :

Soit y dérivable et ne s'annulant pas sur IR, et telle que : $\forall x \in IR.$ $(1+x^2)y' - y = 0$ et $y(0) = 1$

Montrer que y est strictement positive sur IR puis déterminer y

Sujet 4 :

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$ et déduire les solutions de $y'' - y' - 2y = 1$

2. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ et déduire les solutions de $y'' - 2y' + y = -1$

Sujet 5 : Soit $f(t) = \dfrac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$ définie sur IR

1- Vérifier que f admet des primitives sur IR. Soit F la primitive de f sur IR telle que $F(0) = 0$.

2- Montrer que F est impaire

3- Montrer que : $\forall x \geq 0.$ $\ln(1+2x) \leq F(x)$ et déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

4- Montrer que F est bijective de IR vers IR. On pose dans toute la suite $G = F^{-1}$

5- Montrer que G est dérivable sur IR et que : $G'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+4G^2(x)}$

6- a) Montrer que G est deux fois dérivable sur IR et que G est solution de l'équation : $y'' - y = 0$

   b) Calculer $G(0)$ et $G'(0)$

   c) Déterminer G et en déduire F

Sujet 6 :

On considère l'équation différentielle (E) sur IR^{+*} : $4x^2 y + y = 0$ (E)

1. Par le changement de variable $t = \ln(x)$, montrer que : $4e^{2t} y''(e^t) + y(e^t) = 0$

2. On pose $z(t) = y(e^t)$

   a) Calculer $z(t)$ et $z'(t)$

   b) Montrer que la fonction z est solution de l'EDL2 : $4z$-4z'+z=0 (F)

   c) Résoudre (F) et donner la forme générale de $z(t)$

   d) Déduire la forme générale de y

3. f est une fonction deux fois dérivable sur IR^{+*} telle que : $\forall x > 0.$ $f'(x) = f(\frac{1}{4x})$

   a) Montrer que : $\forall x > 0.$ $f''(x) = \frac{-1}{4} x^2 f'(\frac{1}{4x})$

   b) Déduire que : $\forall x > 0.$ $f''(x) = \frac{-1}{4x^2} f(x)$

   c) Déterminer f

Sujet 7:

Considérons la fonction deux fois dérivables sur IR telles que : $\forall x \in IR.$ $f'(1-x) = f(x)$

1. Montrer que : $\forall x \in IR.$ $f''(1-x) = -f'(x)$

2. Déduire que : $\forall x \in IR.$ $f''(x) = -f(x)$

3. Montrer que : $\forall x \in IR.$ $f(x) = f(0)\cos(x) + f(1)\sin(x)$

Sujet 8:

Soit f deux fois dérivable sur IR^{+} avec : $\forall x > 0.$ $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$

Soit : $g(x) = f(e^x)$ pour tout $x \in IR$

1. Montrer que : $\forall x > 0.$ $x^2 f''(x) + f(x) = 0$

2. Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y'' - y' + y = 0$ et déterminer g

3. Déduire l'expression de f

Sujet 9:

Soit la fonction définie sur IR par $f(x)=e^{2x}(\cos(3x)+\sin(3x))$

1. Calculer $f(0)$
2. Calculer $f'(x)$ et déduire $f'(0)$
3. Former une équation différentielle d'ordre 2 dont f est solution
4. Déterminer la primitive F de f telle $F(0)=0$

Sujet 10:

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

   a) $y''+y'+y=0$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=1$

   b) $2y''-3y'+y=2$ (Solution générale)

2. On considère l'équation différentielle dans IR : $y''-2y'+y=xe^{-x}$ (E)

   a) Déterminer la solution générale y_1 de l'équation différentielle dans IR : $y''-2y'+y=0$

   b) On pose $f(x)=(ax+b)e^{-x}$. Calculer a et b pour que f soit solution de (E)

   c) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $y-f$ est solution de (F)

   c) En déduire la solution générale y de (E)