Sujet 1 :

Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3,+,.)$ soient les vecteurs $\vec{u}(-2,1,3)$ et $\vec{v}(1,1,-3)$ et $\vec{w}(1,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$

1. Calculer $2\vec{u}-3\vec{v}+2\vec{w}$
2. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que : $a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{0}$
3. Montrer que si $x\vec{u}+y\vec{v}=\vec{0}$ alors $x=y=0$
4. Déterminer trois nombres réels α et β et γ tels que : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$

Sujet 2 :

1. a) Dans l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$, montrer que $M=\begin{pmatrix}2x & y\\ y & 3x\end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

   b) Montrer que si a et b sont deux nombres réels tels que $a.\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ alors $a=b=0$

2. a) Décomposer convenablement dans l'espace vectoriel $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$ la matrice $N=\begin{pmatrix}-x & y & x\\ z & x & y\\ z & y & x\end{pmatrix}$

   b) Soient A et B et C les matrices obtenues dans la décompositions de N .
   Existe-t-il des nombres réels a et b et c tels que $aA+bB+cC=O$ avec O la matrice nulle

Sujet 3 :

Soit Σ_3 l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égale à 3

1. Montrer que Σ_3 est stable par la somme des fonctions et par leur produit par un nombre réel.
2. Exprimer $P(x)=-2+3x-5x^2+x^3$ à l'aide de monômes simples P_0 et P_1 et P_2 et P_3
3. Montrer tout élément de Σ_3 est combinaison linéaire des monômes P_0 et P_1 et P_2 et P_3
4. Montrer que si ϑ désigne le polynôme nul, alors $aP_0+bP_1+cP_2+dP_4=\vartheta$ implique $a=b=c=d=0$

Sujet 4 :

On considère l'espace vectoriel $\zeta_{(I,\mathbb{R})}$ des fonctions continues sur l'intervalle $I=[0,1]$

Soit $\xi=\{f\in\zeta_{(I,\mathbb{R})}. \quad \int_0^1 f(t)dt=0 \}$. Montrer que ξ est stable par les deux lois de $\zeta_{(I,\mathbb{R})}$

Sujet 5 :

1. Soit: $E=\{\vec{u}(x,y)\in IR^2. \quad 2x-y=0\}$.
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel réel de $(\mathbb{R}^2,+,.)$
3. On considère les vecteurs suivants $\vec{a}(1,2)$ et $\vec{b}(\frac{1}{2},1)$ de E

   Montrer que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs linéairement dépendant de E ($(\vec{a},\vec{b})$ famille liée)

Sujet 6 :

Soit: $E=\{\vec{a}(x,y,z)\in IR^3. \quad 2x-y+z=0\}$. Soient $\vec{u}(1,2,0)$ et $\vec{v}(\frac{1}{2},-1,-2)$ et $\vec{w}(\frac{1}{2},1,0)$ de E

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel réel de $(\mathbb{R}^3,+,.)$
2. Montrer que $(\vec{u},\vec{w})$ est une famille liée de E
3. Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une famille libre de E
4. Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une famille génératrice de E
5. Déduire une base de E et calculer $dimE$

Sujet 7 :

Soit : $F=\{\vec{a}(x,y,z,t)\in IR^4. \quad 3x+y+2z-t=0\}$

1- Montrer que F est un espace vectoriel sur IR.

2- a) Montrer que : $\forall \vec{X}(x,y,z,t)\in F. \quad \vec{X}(x,y,z,t)=x(1,0,0,3)+y(0,1,0,1)+z(0,0,1,2)$

b) Déduire que F est engendré par les vécteurs $\vec{u}(1,0,0,3)$ et $\vec{v}(0,1,0,1)$ et $\vec{w}(0,0,1,2)$

3- Montrer alors que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de F et déduire sa dimension

Sujet 8 :

Soient $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ et $E=\{M=\begin{pmatrix}-2x+y & 2x\\ 2x & 3x+y\end{pmatrix}. \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1- Montrer que $(E,+,.)$ est un espace vectoriel sur IR et que $A\in E$

2- a) Décomposer M en fonction de I et de A

b) Prouver que (I,A) est une base de E et déduire sa dimension

Sujet 9 :

Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $E=\{M\in M_3(\mathbb{R}). \quad AM=MA\}$

1- Montrer que $(E,+,.)$ est un espace vectoriel sur IR

2- a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}. \quad A^n\in E$

b) Calculer A^2 et A^3 et A^n pour $n\geqslant 3$

3- Montrer que (I,A,A^2) est une famille libre de $(E,+,.)$

4- Déterminer E en extension (Donner la forme des éléments de E)

5- Déduire que (I,A,A^2) est une base de E

Sujet 10 :

Soient $E=\left\{M_{(x,y,z)}=\begin{pmatrix}x&z&y\\y&x+z&y+z\\z&y&x+z\end{pmatrix}. \quad (x,y,z)\in IR^3\right\}$

Soient $I=M_{(1,0,0)}$ et $J=M_{(0,1,0)}$ et $K=M_{(0,0,1)}$

1- Déterminer $M(x,y,z)$ en fonction de x et y et z et I et J et K

2- Montrer que $J^2=K$ et $K^2=J+K$ et $JK=KJ=I+J$

3- Montrer que $(E,+,.)$ est un espace vectoriel sur IR

4- Montrer que (I,J,K) est une base de E

Sujet 11 :

Partie 1 : On considère l'équation différentielle (F) : $y'-\sqrt{2}y=0$. Soit S l'ensemble de ses solutions

1. Montrer que S est un espace vectoriel sur IR
2. Ecrire la solution générale de (F)
3. a) Donner une base de S et déterminer sa dimension

   b) Donner les coordonnées dans cette base de la solution de (F) qui prend la valeur 1 en 2

Partie 2 : On considère l'équation différentielle (F) : $y''-3y'+2y=0$. Soit S l'ensemble de ses solutions

1. Montrer que S est un espace vectoriel sur IR
2. Ecrire la solution générale de (F)
3. a) Donner une base de S et déterminer sa dimension

   b) Donner les coordonnées dans cette base de la solution de (F) telle que $y(0)=1$ et $y'(0)=2$

Sujet 12 :

Dans ce sujet, $I=[0,+\infty[$ et $F_{(I,IR)}$ est l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur I

Soit $F=\{f\in F_{(I,IR)}\ /\ \forall x\in I.\quad xf''(x)-(x+1)f'(x)+f(x)=0\}$

1- Vérifier que $(F,+,\cdot)$ est un sous espace vectoriel de $F_{(I,IR)}$

2- Soient $u(x)=e^x$ et $v(x)=x+1$. Montrer que (u,v) est une famille libre de F

3- Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $y'''-y''=0\ (1)$

4- Montrer que : $\exists(A,B)\in IR^2.\quad y'-y=Ax+B\quad (2)$

5- Montrer que $y_0=-Ax-(A+B)$ est solution de (2)

6- a) Montrer que $(2)\Longleftrightarrow(y-y_0)'-(y-y_0)=0$

b) Déduire que : $\exists(\alpha,\beta)\in IR^3.(\forall x\in I).\quad f(x)=\alpha e^x+\beta x+\beta$. Déduire $dimF$

Sujet 13 :

1- Déterminer les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $1+z+z^2=0$. On note $j=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2- Pour $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, on définit l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $P_{(a,b,c)}(z)=a+bz+cz^2$

Calculer $P_{(1,1,1)}(j)$. Donner le module et l'argument principal de $P_{(1,i,j)}(i)$ et de $P_{(1,2i,j)}(j)$

3- On rappel que $(F_{(\mathbb{C},\mathbb{C})},+,.)$, l'ensemble des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel réel

a) Soit $E=\{P_{(a,b,c)}\in F_{(\mathbb{C},\mathbb{C})}.\quad (a,b,c)\in IR^3\}$. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $F_{(\mathbb{C},\mathbb{C})}$

b) Montrer que la famille $B=(P_{(1,0,0)},P_{(0,1,0)},P_{(0,0,1)})$ est une base de E

4- On pose $Q(z)=(z-1)^2+z$ et $R(z)=2z-1$. Montrer que la famille (Q,R) est libre dans E

Sujet 14 :

Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux espaces vectoriel sur IR. Soit f une application de E dans F.

f est dite linéaire lorsque : $\forall a,b\in IR.\ \forall x,y\in E.\quad f(ax+by)=af(x)+bf(y)$

1. Montrer que $f(0)=0$

2. Soit $N(f)=\{x\in E/\quad f(x)=0\}$. $N(f)$ est dit noyau de f

a) Montrer que $N(f)$ est un sous espace vectoriel de E

b) Montrer que : f est injective si et seulement si $N(f)=\{0\}$

3. On suppose E et F de dimensions finies et f bijective. Soit $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots\ldots,\vec{e}_n)$ une base de E.

Montrer que $(f(\vec{e}_1),f(\vec{e}_2),\ldots\ldots,f(\vec{e}_n))$ est une base de F

Sujet 15 :

Soient les ensembles :

$$D_{iag}=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}\in M_3(IR).\quad (x,y,z)\in \mathbb{R}^3\right\} \text{ et } T_s=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}\in M_3(IR)\quad (a,b,c,d,e,f)\in IR^6\right\}$$

1. Montrer que :

   a) D_{iag} est un sous-espace vectoriel de $M_3(IR)$. En préciser la dimension

   b) Calculer D^n avec $D\in D_{iag}$ et $n\in \mathbb{N}^*$

   c) Sous quelles conditions D est-elle inversible ? Préciser son inverse

5- Montrer que :

   a) T_s est un sous-espace vectoriel de $M_3(IR)$. En préciser la dimension

   b) Sous quelles conditions nécessaire et suffisante D est-elle inversible ?

Sujet 16 :

$(M_2(IR),+,\times)$ est un anneau unitaire, non commutatif et non intègre. $(M_2(IR),+,.)$ est un IR-EV

1- Soit $C=\left\{M_{(x,y)}=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.\quad (x,y)\in IR^2\right\}$

   a) Montrer que C est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

   b) Montrer que C est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ et que $\times$ est commutative dans C

   c) Montrer que $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe abélien

2- Montrer que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif

3- On pose $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $J^2=-I$ et que $M_{(x,y)}=xI+yJ$

4- Soit $U=\left\{M_{(x,y)}=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.\quad (x,y)\in IR^2 \quad et \quad x^2+y^2=1\right\}$

   a) Montrer que U est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$

   b) Montrer que : $\forall M_{(x,y)}\in C.\ \exists\theta\in]-\pi,\pi].\quad M_{(x,y)}=\sqrt{x^2+y^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

   c) Etablir que : $\forall n\in\in.\forall\theta\in]-\pi,\pi].\quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$

   e) Résoudre dans U l'équation : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^n=I$

5- On munit C du produit externe d'une matrice par un scalaire.

   a) Montrer que $(C,+,.)$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(IR),+,.)$

   b) Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel C et déduire sa dimension

Sujet 17 :

Partie 1 :

Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3. On pose $J=A+I$

1. Calculer J^2. J est-elle inversible ?

2. Montrer que $A^2=A+2I$. Déduire que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}

3. Construire deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall\, n\in\mathbb{N}.\quad A^n=u_nA+v_nI$

4. On pose : $\alpha_n=2u_n+v_n$ et $\beta_n=u_n-v_n$.

   a) Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques et déduire u_n et v_n en fonction de n

   b) Déduire A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$

Partie 2 :

Soit $E=\{xA+yI.\quad (x,y)\in IR^2\}$

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $M_3(IR)$.

2. a) Montrer que (A,I) est une base de E.

   b) Donner les coordonnées de A^2 dans cette base

3. a) Montrer que (A^2,I) est une base de E.

   b) Exprimer les coordonnées de A dans cette base

4. Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif. Est-il un corps ?

5. Retrouver le résultat de la question 5-b en utilisant la base (A,I) de E

Sujet 18 :

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}+1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}+1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}+1 \end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Partie 1 :

1. Montrer que $J^2=J$ et déduire que J n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$
2. Montrer que $A^n=\begin{pmatrix} \frac{2^n-1}{3}+1 & \frac{2^n-1}{3} & \frac{2^n-1}{3} \\ \frac{2^n-1}{3} & \frac{2^n-1}{3}+1 & \frac{2^n-1}{3} \\ \frac{2^n-1}{3} & \frac{2^n-1}{3} & \frac{2^n-1}{3}+1 \end{pmatrix}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Partie 2 :

Soit $V=\{(xI+yJ)\in M_3(\mathbb{R}). \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

1. a) Montrer que V est un sous espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$

   b) Montrer que (I,J) en est une base de V
2. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose $A(t)=I+(2^t-1)J$. Soit l'ensemble $H=\{A(t). \quad t\in\mathbb{R}\}$

   a) Montrer que H est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

   b) Montrer que l'application $t\to A(t)$ définie un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(H,\times)$

   c) Déduire la structure de $(H,\times)$ et ses éléments caractéristiques

Partie 3 :

Soit $E=\{(xI+yJ)\in M_3(\mathbb{R}). \quad (x,y)\in\mathbb{Z}^2\}$.

1. a) Montrer que $(E,+)$ est un groupe commutatif

   b) Montrer que $(E,+,.)$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
2. a) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire

   b) Montrer que $(E,+,\times)$ n'est pas un corps
3. Soit G l'ensemble des inversibles de E. Montrer que $G=\{I,-I,-I+2J,I-2J\}$