Etude de fonctions

Br-Rachid www.sc-math.e-monsite.com

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Sujet 1

On considère la fonction $f(x)=\frac{1}{2}x-2+\frac{2}{x}$

1. Montrer que $A_{(0,-2)}$ est un centre de symétrie de ζ_f
2. Calculer les limites de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats
3. Montrer que la droite $(D): y=\frac{1}{2}x-2$ est asymptote à ζ_f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$
4. Calculer la dérivée de f et poser son tableau des variations
5. Calculer la dérivée seconde de f et déterminer la concavité de ζ_f
6. Représenter ζ_f dans $(O,\vec{i},\vec{j})$
7. Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $(x-2)^2=2mx$ avec $m\in\mathbb{R}$

Sujet 2

On considère la fonction $f(x)=\cos(2x)$

1. a) Montrer que f est périodique et est paire
   b) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}.\quad f(\pi-x)=f(x)$ et $\forall x\in\mathbb{R}.\quad f(\frac{\pi}{2}-x)=-f(x)$
   c) Déduire le domaine d' étude de f
2. Poser le tableau des variations de f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
3. a) Etudier la concavité de ζ_f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
   b) Représenter ζ_f sur $[-2\pi,2\pi]$

Sujet 3 : On considère la fonction $\begin{cases} f(x)=4\sin\frac{\pi}{2}x & si \quad |x|\leq 1 \\ f(x)=x+\frac{9x}{x^2+2} & si \quad |x|>1 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que f est impaire
2. Montrer que la droite $(y=x)$ est asymptote à ζ_f au voisinage de $+\infty$
3. Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter les résultats géométriquement
4. Calculer la fonction dérivée de f et poser son tableau des variations sur $[0,+\infty[$
5. a) Etudier la concavité de f sur $[0,+\infty[$
   b) Montrer que $B_{(\sqrt{6},f(\sqrt{6}))}$ est un point d'inflexion de ζ_f
6. Représenter ζ_f

Sujet 4

Soit la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{2-x} & si \quad x\in[0,1] \\ f(x)=x-\sqrt{x^2-x} & si \quad x\in IR/[0,1] \end{cases}$

1. a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition

   b) Déduire les branches infinies du graphique de f

2. a) Etudier et interpréter la dérivabilité de f en 0

   b) Etudier et interpréter la dérivabilité de f en 1

3. a) Calculer la dérivée de f sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$

   b) Donner le tableau des variations de f . Déduire le signe de f

4. Représenter f graphiquement

5. Soit $m\in]0,+\infty[$. Donner le nombre de solution dans $[0,1]$ de l'équation $mf(x)-1=0$

Sujet 5

Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2 . On considère la fonction: $f(x)=\dfrac{1+x^n}{(1+x)^n}$

1. Déterminer le domaine de définition de f

2. Calculer les limites de f aux voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

3. Calculer suivant la parité de n les limites de f en -1

4. a) Montrer que : $\forall x\in]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[. \quad f'(x)=n\dfrac{x^{n-1}-1}{(x+1)^{n+1}}$

   b) Poser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}^+$

   c) Déduire que : $\forall x\geq 0. \quad (1+x)^n\leq 2^{n-1}(1+x^n)$

5. Déduire de ce qui précède que: $\forall x\geq 0. \ \forall y\geq 0. \quad (x+y)^n\leq 2^{n-1}(x^n+y^n)$

6. Dans cette question on prend $n=2$. Représenter graphiquement f

Sujet 6 : Soit $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$

1. a) Calculer les limite de f aux bornes de son domaine de définition

   b) Déterminer les branches infinies de C_f

2. Calculer la dérivées de f et donner son tableau des variations

3. Soit g la restriction de f à f $à\left[1,+\infty\right[$. Montrer que g est bijective de $\left[1,+\infty\right[$ vers $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$

   1- Représenter graphiquement les courbes de f et g^{-1} (dans un même repère orthonormé)

   2- Soit $I=[0,1]$. Montrer que $f(I) C I$ et que $\forall x\in I.$ $\quad |f(x)-1|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}|x-1|$

   3- Soit $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

  1- Montrer que (u_n) est minorée par 0 et est majorée par 1

  2- Montrer que (u_n) est croissante

  3- a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.$ $\quad |u_{n+1}-1|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}|u_n-1|$

     b) Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}.$ $\quad |u_n-1|\leq\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

Sujet 7 : Soit $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-1} & si \quad |x|>1 \\ f(1)=f(-1)=0 & \\ f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) & si \quad x\in\left]-1,1\right[\end{cases}$

1- Déterminer le domaine de définition de f

2- a) Montrer que : $\forall x\in\left]-1,1\right[.$ $\quad f(-x)=-f(x)$ $\quad$ et $\quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left]-1,1\right[.$ $\quad f(-x)=f(x)$

   b) Déduire qu'il suffit d'étudier f sur $\left[0,+\infty\right[$

3- Calculer $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ et interpréter le résultat obtenu graphiquement

4- Déterminer la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$

5- Montrer que f n'est pas dérivable en 1 à gauche. Interpréter ce résultat géométriquement

6- a) Montrer que : $\begin{cases} f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & si \quad x>1 \\ f'(x)=\frac{\pi}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) & si \quad x\in\left[0,1\right[\end{cases}$

   b) Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point $O(0,0)$

   c) Poser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}^+$

7- Tracer la courbe de f