Fonction Exponentielle

Exercice 1:

1. Resoudre dans $\mathbb{R}$ les equation $e^{2x-1}=1$ et $e^{\frac{1}{4}x^2}-e=0$
2. Resoudre dans $\mathbb{R}$ les iequation $e^{x^2-x-2}\leq 1$ et $e^{1-3x}>e^{2x+3}$

Exercice 2: Soit f la fonction f definie par $f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^x}$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$
2. Determiner D_f

Exercice 3:

1. Resoudre dans $\mathbb{R}$ l'equation $e^{2x}-e^x-2=0$
   a- Montrer que $e^{2x}-e^x-2=(e^x+1)(e^x-2)$
   b- En déduire les solutions de l'equation $e^{2x}-e^x-2=0$
2. Determiner le domaine de definition de $f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^x-2}$

Exercice 4: On considere la fonction $g(x)=e^{3x}+e^{2x}-e^x-1$

1. Montrer que $f(x)=(e^x-1)(e^x+1)^2$
2. Determiner $\zeta_f\cap(Ox)$ et $\zeta_f\cap(Oy)$

Exercice 5:

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{3x}+e^{2x}+5e^x-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5e^{2x}+e^x-2}{-e^{3x}+1}$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}.\ln x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-\ln x$
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+e^{-x})$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

Exercice 6 : Soit la fonction $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-3)$

1. Determiner la branche infinie de ζ_f au voisinage de $+\infty$
2. Determiner la branche infinie de ζ_f au voisinage de $-\infty$
3. Calculer $f'(x)$ et poser le tableau des variations de f
4. Ecrire l'equation de la tangente de ζ_f au point $A_{(0,-1)}$
5. Montrer que ζ_f est convexe et déduire que $f(x)\geq\frac{1}{2}x-1$
6. Montrer que f admet une fonction reciproque. Calculer l'expression $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
7. Representer graphiquement ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$

Exercice 7 : Soit $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n^2+2u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 1+u_{n+1}=(1+u_n)^2$
2. a- Montrer que la suite $v_n=\ln(1+u_n)$ est positive strictement
   b- Montrer que (v_n) est geometrique et deduire $\lim v_n$
3. Exprimer u_n en fonction de v_n et deduire $\lim u_n$

Exercice 8 : Soit $u_0=6$ et $u_{n+1}=\sqrt[3]{2+u_n}-2$ pour $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 2+u_n>0$
2. a- Montrer que la suite $w_n=\ln(2+u_n)$ est geometrique
   b- En deduire $\lim w_n$
3. Exprimer u_n en fonction de n et deduire $\lim u_n$

Exercice 9 : $u_0=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+2u_n}$ et $w_n=(1-\ln 2)^{\frac{1}{u_n}}$

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_n\in\mathbb{Q}$
2. Montrer que (w_n) est geometrique et deduire $\lim w_n$
3. En deduire u_n en fonction de n puis calculer $\lim u_n$

Exercice 10 :

On considere la suite $u_0=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n-2}{2u_n+5}$ et on pose

$$v_n=\frac{3}{1+u_n} \text{ et } w_n=e^{3-v_n} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Montrer par recurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_n>-1$
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone et determiner sa monotonie. En déduire que la suite (u_n) est convergente
3. a- Verifier que $v_1-v_0=2$
   b- Montrer que (v_n) est arithmetique et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
5. a- Verifier que $\dfrac{w_1}{w_0}=\dfrac{1}{e^2}$
   b- Montrer que (w_n) est geometrique et deduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$
6. On pose $S_n=e^{-v_0}+e^{-v_1}+....+e^{-v_{n-1}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $S_n=\dfrac{\sqrt{e}}{e^2-1}\left(1-e^{-2n}\right)$ et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 11 :

On considere la fonction $f(x)=\sqrt{e^x-1}$

1. Determiner D_f et calculer $f(\ln 2)$
2. Resoudre l'equations $f(x)=0$ dans $\mathbb{R}^+$
3. a- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
   b- En deduire la branche infinie de ζ_f en $+\infty$
4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpreter graphiquement ce resultat
6. Montrer que : $\forall x>0.\quad f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$
7. Montrer que : $f''(x)=\dfrac{e^{2x}-2e^x}{16(e^x-1)\sqrt{e^x-1}}$
8. Poser le tableau de variation de f
9. Poser le tableau de concavité de ζ_f
10. Montrer que f a une fonction reciproque definie sur $\mathbb{R}$
11. Representer graphiquement la tangente a ζ_f au point A d'abscisse $\ln\sqrt{2}$ ainsi que les courbes ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$

Exercice 12 :

Partie 1:

On donne $g(x)=e^{x}-e^{-x}+2x$ avec $x\geq 0$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in I$ avec $I=[0,+\infty[$
2. Poser le tableau des variations de g et déduire son signe

Partie 2:

f est definie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\dfrac{2x}{1+e^{x}}$

1. Montrer que f est paire
2. a- Montrer que la droite $(\Delta): y=x$ est asymptote a ζ_f

   b- Determiner la position de ζ_f et la droite (Δ)
3. Montrer que : $\forall x\geq 0.\quad f'(x)=g(x).e^{x}.(e^{x}+1)^{-2}$
4. Poser le tableau des variations de f et representer ζ_f

Partie 3:

Soit $u_0=\ln 2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_n>0$
2. a- Montrer que (u_n) est decroissante et convergente

   b- Calculer $\lim u_n$

Exercice 13 :

On donne $\begin{cases} f(x)=e^{2x}-2e^{x} & si \quad x\leq 0 \\ f(x)=x^{2}Lnx-\dfrac{x^{2}}{2}-1 & si \quad x>0 \end{cases}$ pour $x\in\mathbb{R}$

1. Montrer que f est continue en 0
2. Résoudre dans $]-\infty,0[$ l'équation $f(x)=0$
3. a- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{f(x)+1}{x}$ et interpréter le résultat obtenu

   b- Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{f(x)+1}{x}=0$ et interpréter le résultat
4. Etudier les branches infinies de ζ_f au voisinage de $\pm\infty$
5. a- Montrer que $\begin{cases} f'(x)=2e^{x}(e^{x}-1) & si \quad x<0 \\ f'(x)=2xLnx & si \quad x>0 \end{cases}$

   b- Poser le tableau des variations de f
6. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique c dans $\left]2,\dfrac{5}{2}\right[$. En déduire le signe de f
7. Calculer $f''(x)$ et déduire la concavité de ζ_f
8. Représenter graphiquement ζ_f

Exercice 14 :

Soient $f(x)=xe^{x}$ et ζ_f sa courbe dans un RON

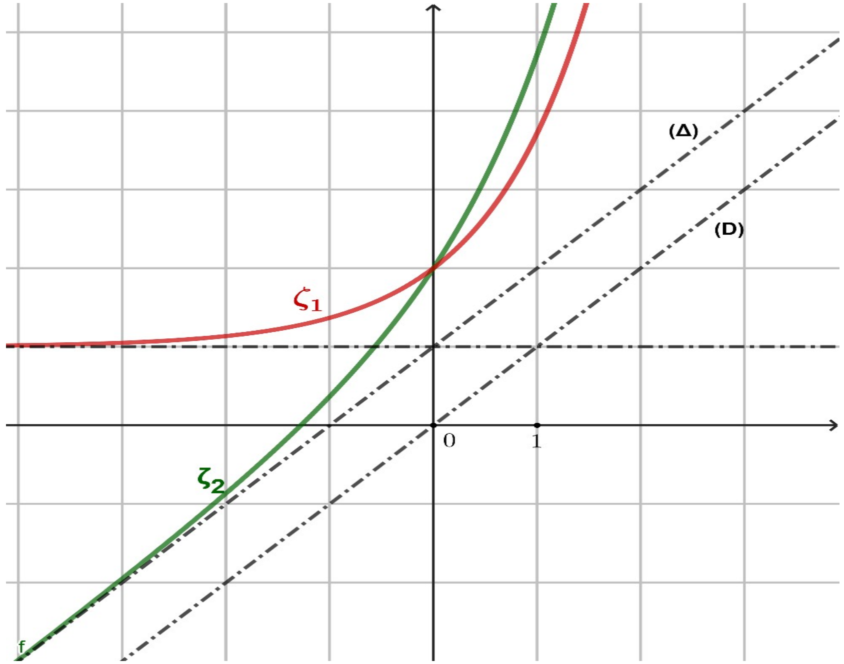
1. Determiner les branches infinies de ζ_f
2. Poser le tableau des variations de f
3. Determiner la concavité et le point d'inflexion de ζ_f
4. Montrer que la restriction de f à $[-1,+\infty[$ est bijective
5. Représenter graphiquement les courbes ζ_f et $\zeta_{g^{-1}}$

Exercice 15 :

Soient $f(x)=x\sqrt{e}\,e^{\frac{-1}{2}x^2}$ et ζ_f sa courbe dans un RON

1. Verifier que ζ_f est symetrique par rapport a l'origine
2. Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote de ζ_f
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$
4. Donner l'equation de la tangente (T) de ζ_f au point O
5. Determiner la concavité de ζ_f sur $[0,+\infty[$
6. Montrer que la restriction g de f à $[-1,1]$ est bijective
7. Représenter graphiquement les courbes ζ_f et $\zeta_{g^{-1}}$

Exercice 16 :



Partie 1 :

1. Reconnaitre la courbe de f derivable sur $\mathbb{R}$ et celle f'
2. Calculeret $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$
3. Déterminer l'équation de l'asymptote de ζ_f au voisinage de $-\infty$
4. En deduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$
5. Sachant que $f(x)=e^{x}+ax+b$, calculer a et b
6. Montrer que : $\exists!\, c\in[-2,-1].\ f(c)=0$ ($c\simeq-1{,}25$)
7. Justifier que f admet une fonction réciproque et la représenter

Partie 2 : On considere la fonction $g(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}$

1. Montrer que $g(c)=c+1$
2. Calculer et interpreter graphiquement $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
3. Déterminer la branche infinie de la courbe ζ_g au voisinage de $+\infty$
4. Montrer que $g'(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}f(x)$ et poser le TBL-VAR
5. Representer graphiquement la courbe ζ_g

Partie 3 : Soit $u_0=\ln 2$ et $u_{n+1}=g(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Calculer u_1 et montrer que $u_1<u_0$
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 0<u_n<1$
3. Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante
4. Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice 17 : On donne $u_0=16e$ et $u_{n+1}=4\sqrt{u_n}$ et $v_n=\ln\left(\dfrac{u_n}{16}\right)$

1. Montrer que (v_n) est géométrique et calculer son terme general
2. Calculer $\lim v_n$ et déduire $\lim u_n$
3. Calculer $S_n=v_0+v_1+......+v_{n-1}$ et $P_n=u_0\times u_1\times.....\times u_{n-1}$
4. a- Montrer que $\ln(P_n)=S_n+\ln(16^n)$

   b- En deduire P_n en fonction de n puis calculer $\lim\left(\dfrac{P_n}{16^n}\right)$

Exercice 18 :

Soient $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{2u_n-1}$ et $v_n=\ln(1-\dfrac{1}{u_n})$

1. Calculer u_1 puis montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_n>1$
2. Valculer $\dfrac{v_1}{v_0}$ puis montrer que la suite (v_n) est geometrique
3. Calculer v_n en fonction de n et déduire que $u_n=\dfrac{1}{1-e^{2^n\ln\frac{1}{2}}}$
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
5. Soit le produit $P_n=\left(1-\dfrac{1}{u_0}\right).\left(1-\dfrac{1}{u_1}\right).......\left(1-\dfrac{1}{u_{n-1}}\right)$ Calculer

   $\ln P_n$ en fonction de n et déduire que $P_n=\dfrac{1}{2^{2^n-1}}$

Exercice 19 :

On considere la suite $u_0=0$ et $e^{u_{n+1}}=1+2e^{u_n}$ et $v_n=1+e^{u_n}$

1. Calculer v_0 et u_1 et v_1
2. Montrer que $u_{n+1}=\ln(1+2e^{u_n})$ et que $e^{u_{n+1}}-e^{u_n}=v_n$
3. a- Montrer que la suite (v_n) est geometrique. Preciser sa raison

   b- En deduire v_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
4. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_n=\ln(2^{n+1}-1)$
5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{\ln 2^n}$