Sujet 1:

1. a) Résoudre dans IR l'équation $e^{2t}-3e^{t}+2=0$.

   b) Déduire les solutions dans IR de $e^{2t}-3e^{t}+2\geq 0$

2. Calculer les limites $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}$ et $\lim_{x\to-\infty}x^{\frac{2}{5}}e^x$ et $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-x-1}{\sqrt[3]{x}}$

3. Calculer les dérivées des fonctions $a(x)=e^{(1-x)}\arctan(2x)$ et $b(x)=e^{x^2}\ln(1+e^x)$

4. Primitiver les fonctions $u(x)=\frac{1}{x^2}e^{x^2}$ et $v(x)=e^{e^x+x}$ et $w(x)=\frac{e^x+1}{e^x+x}$

5. Montrer que : $\forall x\in IR.\quad \frac{\arctan(e^x)+\arctan(e^{-x})}{\pi}=\frac{1}{2}$

Sujet 2 :

Soit : $u_0=1$ *et* $\forall n\in\in.\quad u_{n+1}=u_n^{\ 2}+2u_n$. On pose : $v_n=\ln(1+u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et calculer $\lim(v_n)$
2. Déduire $\lim(u_n)$
3. Calculer en fonction de n le produit $\prod_{k=0}^{k=n}(1+u_k)$

Sujet 3 :

1- Calculer : $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

2- Calculer : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^x$ et $\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x^2}}$

3- Dériver et primitiver la fonction $x\to a^x$ pour $a\in IR^{+*}-\{1\}$

4- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2^x-2^{\frac{x}{2}}-6=0$

Sujet 4 :

1. a) Montrer que l'équation (E): $e^x=3+2x$ admet une solution unique $\alpha\in[-2,-1]$.

   b) Vérifier que : $\frac{e^{\alpha}-3}{2}=\alpha$

2. Montrer que la fonction $f(x)=\frac{e^x-3}{2}$ laisse stable l'intervalle $]-\infty,0]$

3. Montrer que : $\forall x\leq 0.\quad |f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

4. On considère la suite $u_0=-1$ et $u_{n+1}=\frac{e^{u_n}-3}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   1- Montrer que (u_n) est une suite négative

   2- Montrer que : $\forall n\in\in.|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

   3- Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite

Sujet 5 :

1. montrer que pour tout entier n l'équation $(E_n): \ln(x) - \arctan x = n\pi$ admet une unique solution x_n dans $]0,+\infty[$
2. Montrer que $e^{n\pi} < x_n$ et déduire la limite de la suite x_n
3. Montrer que : $\ln\left(\frac{x_n}{e^{n\pi}}\right) = arctg(x_n)$. Déduire $\lim\left(\frac{x_n}{e^{n\pi}}\right)$
4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = arctg(x_n) - arctg(x_{n+1}) - \pi$
5. Calculer $\lim\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$

Sujet 6:

1. Soit la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$. On donne $\ln 2 \approx 0{,}6$ et $\ln(3) \approx 1{,}1$
1. Poser le tableau des variations de g
2. a) Montrer que : $\exists! \alpha \in \left]\frac{3}{2},2\right[.\quad g(\alpha) = 0$

   b) En déduire le signe de g
3. Soit la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = e^{-x}\ln(x)$.

   a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduire que $\frac{1}{2e^2} < f(\alpha) < \frac{2}{3e^{\frac{3}{2}}}$

   b) Déterminer les branches infinies de la courbe de f

   c) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x > 0.\quad f'(x) = e^{-x} g(x)$

   d) Représenter graphiquement la courbe de f dans un repère orthonormé
4. Soit la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$

   a) Vérifier que : $\forall x > 0.\quad h(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 0$

   b) Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{3}{2},2\right].\quad \frac{-4}{9} e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq \frac{-1}{4} e^{\frac{1}{2}}$

   c) Déduire que : $\exists k \in]0,1[.\ \forall x \in \left[\frac{3}{2},2\right].\quad |h'(x)| < k$
5. Soit la suite donné par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   a) Montrer que : $\forall \in \in.\quad u_n \in \left[\frac{3}{2},2\right]$

   b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite

Sujet 7:

Partie A

1. Donner la primitive de $a(x)=e^x+xe^x$ qui s'annule en 0
2. Vérifier que : $\forall x\geq 0.\quad e^x\geq x+1$
3. Vérifier que : $\forall x\geq 0.\quad x\leq e^x-1\leq (x+1)(e^x-1)$
4. Déduire que : $\forall x\geq 0.\quad \frac{1}{2}x^2\leq e^x-x-1\leq x(e^x-x-1)+\frac{1}{2}x^2$
5. Montrer alors que : $\forall x>0.\quad 0\leq \frac{e^x-x-1}{x^2}-\frac{1}{2}\leq \frac{e^x-x-1}{x}$ et déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$

Partie B

On considère la fonction : $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ si $x>0$ et $f(0)=1$

1. Vérifier que f est continue et est dérivable en 0 à droite
2. Etudier la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$
3. On considère la fonction u définie sur IR^+ par : $u(x)=xe^x-e^x+1$. Etudier le signe de u sur
4. Calculer $f'(x)$ en fonction de $u(x)$ et déduire les variations de f
5. Représenter graphiquement la courbe de f dans le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Sujet 8: (BAC 2016 – 7 points)

Première partie :

1- En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t\mapsto e^{-t}$, montrer que pour tout nombre réel strictement positif x , il existe un réel θ compris entre 0 et x tel que : $e^\theta=\frac{x}{1-e^{-x}}$

2- En déduire que :

a) $\forall x>0.\quad 1-x<e^{-x}$

b) $\forall x>0.\quad 1+x<e^x$

c) $\forall x>0.\quad 0<\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)<x$

Deuxième partie :

Soit la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{xe^x}{e^x-1}$ si $x>0$ et $f(0)=1$

1. a) Montrer que f est continue à droite en 0

   b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

2. a) Montrer que : $\forall x>0.\quad x-\frac{x^2}{2}<e^{-x}+1$ (Utiliser la question 2-a) de la première partie)

   b) En déduire que : $\forall x>0.\quad \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}<e^{-x}+x-1<\frac{x^2}{2}$

3. a) Vérifier que : $\forall>0. \quad \frac{f(x)-1}{x}=\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}f(x)$

   b) Déduire que $\frac{\lim_{x\to 0^+} f(x)-1}{x}=\frac{1}{2}$ et interpréter le résultat graphiquement

4. a) Montrer que f est dérivable en tout point de $]0,+\infty[$ et que : $\forall x>0. \quad f'(x)=\frac{e^x(e^x-1-x)}{(e^x-1)^2}$

   b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ (Utiliser la question 2-b-première partie)

Troisième partie :

On considère la suite numérique définie par $u_0>0$ et $u_{n+1}=\ln(f(u_n))$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}. \quad u_n>0$
2. Montrer que (u_n) est strictement décroissante et convergente (Utiliser 2-c)-première partie)
3. Montrer que 0 est l'unique solution de $\ln(f(x))=x$ puis déterminer la limite de la suite (u_n)

Sujet 9: (BAC 2017– 7 ,75 points)

Première partie :

Soit la fonction définie sur $[0,+\infty]$ par : $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$

1- a) Montrer que f est continue en 0 à droite

b) Montrer que f est dérivable en 0 à droite

c) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée

2- a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat obtenu

b) Donner le tableau des variations de f

3- a) Montrer que la courbe de f admet un point d'inflexion I à déterminer

b) Représenter la courbe de f (On donne $f(1)\approx 0{,}7$ et $4e^{-3}\approx 0{,}2$)

Deuxième partie :

4- a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*. \quad \exists! a_n>0. \quad f(a_n)=e^{\frac{-1}{n}}$

b) Montrer que la suite (a_n) est croissante

c) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*. \quad \frac{-1}{a_n}+\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=\frac{-1}{n}$

5- a) Montrer que : $\forall t>0. \quad 1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$

b) Déduire que : $\forall x>0. \quad -\frac{x^2}{2}\leq -x+\ln(1+x)\leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

6- a) Vérifier que $a_4\geq 1$ puis déduire que : $\forall n\geq 4. \quad a_n\geq 1$ (On admet que $e^{\frac{3}{4}}\geq 2$)

b) Montrer que : $\forall n\geq 4. \quad 1-\frac{2}{3a_n}\leq\frac{2a_n^2}{n}\leq 1$ (Utiliser les question 1-c) et 2-b))

c) Montrer que $\sqrt{n/6}\leq a_n$ (Utiliser les questions 3-a) et 3-b)) puis déduire $\lim (a_n)$

d) Déterminer $\lim\left(a_n\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$