Sujet 1:

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction : $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2\ln(2x-3)=3\ln(2x-3)$ et $1-\ln(x^2)>0$ et $1-\ln^2(x)>0$
3. Calculer les dérivées des fonctions $g(x)=\ln(\ln(x))$ et $h(x)=arctg(\ln(x))$
4. Montrer que : $\forall x>0.\ \ln(x)\leq x-1$
5. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$ et $\lim\limits_{x\to1}\frac{2\ln(x)}{x^2-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^7}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{\frac{2}{3}}}$

Sujet 2 :

1. Déterminer la forme générale des primitives de : $f(x)=\frac{1}{xLn(x)}$
2. Soit : $g(x)=\frac{\ln(x)}{x}$. Déterminer la primitive G de g sur $]0,+\infty[$ telle que $G(1)=-1$
3. Soient $h(x)=\frac{2x}{x^2+x+2}$ et $a(x)=\frac{2x}{x^2-x-2}$
   a) Vérifier que : $h(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+2}-\frac{1}{x^2+x+2}$ et $a(x)=\frac{2x-1}{x^2-x-2}+\frac{-1}{3(x+1)}-\frac{1}{3(x-2)}$
   b) Déterminer la primitive H de h telle que $H(2)=0$.
   c) Déterminer le primitive de a nulle en 0
4. Soit $t(x)=\arctan(x)+\frac{x}{1+x^2}$
   a) Donner la primitive, qui s'annule en 0, de la fonction $a(x)=\frac{x}{1+x^2}$ sur IR.
   b) Donner la primitive, qui s'annule en 0, de la fonction t sur IR. (Utiliser la forme $u'v+uv'$)
   c) Déduire la primitive, qui s'annule en 0, de la fonction $\arctan$
1. Soit $l(x)=\ln(x)+1$
   a) Donner la primitive, qui s'annule en 1, de la fonction l sur IR. (Utiliser la forme $u'v+uv'$)
   b) Déduire la primitive, qui s'annule en 1, de la fonction $\ln$

Sujet 3:

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction $g_n(x)=x-n+\frac{n}{2}\ln(x)$ définie sur $]0,+\infty[$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}g_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+}g_n(x)$

2- Calculer $g_n'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$ et poser le tableau des variations de g_n

3- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*.\ \ \exists\alpha_n\in[1,e^2[: g_n(\alpha_n)=0$

4- Montrer que $\ln(\alpha_n)=2-\frac{2}{n}\alpha_n$

5- Montrer que la suite (α_n) est strictement croissante

6- Déduire que la suite (α_n) est convergente puis calculer $\lim(\ln(\alpha_n))$ et $\lim(\alpha_n)$

Sujet 4 :

1. Résoudre l'équation : $\log_2(2x)+\log_4(x)=1{,}5$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{log_2(x)-1}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{log_{\frac{1}{2}}(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{log_{\frac{1}{2}}(x)}{x}$

3. Soit $a\neq 1$ un nombre réel strictement positif. Soit $f(x)=\dfrac{1}{\ln(a)}\dfrac{\log_a(x)}{x}$

   Déterminer la primitive de f sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en a

Sujet 5:

1. Montrer que : $\forall t>0.\quad t-\dfrac{t^2}{2}\leq \ln(1+t)\leq t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}$ et déduire que : $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}$
2. Etudier le signe de la fonction $u(x)=x-1-xLn(x)$ définie sur $]0,+\infty[$

   Soit $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x-1}$ définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$

1. Calculer les limites de f et interpréter les résultats obtenus
2. Calculer : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$
3. Montrer que : $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x(x-1)^2}$. Donner le tableau des variations de f
4. Représenter la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
5. Montrer que g, le prolongement par continuité de f en 1, est bijective sur IR^+ et représenter $C_{g^{-1}}$

Sujet 6:

1- La fonction u est définie par : $\forall x>-1.\quad u(x)=\dfrac{x}{1+x}-2\ln(1+x)$

- Calculer $u(0)$ puis calculer les limites de u en -1 à droite et en $+\infty$
- Calculer la dérivée de u et poser son tableau des variations
- Vérifier que : $\exists ! c\in\left]-1,\dfrac{-1}{2}\right[.\quad u(c)=0$ et déduire le signe de u

2- Soit la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$

   1- Déterminer le domaine D_f de f puis déterminer les branches infinies de C_f

   2- Préciser le domaine de dérivabilité de f et montrer que $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^3}$

3- Représenter la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On donne $f(c)\approx-2{,}5$)

Sujet 7:

Soit $n \geq 3$ un entier naturel. On considère la fonction définie sur IR^{+*} par $g_n(x) = nx + 2\ln(x)$

1. Poser le tableau des variations de g_n
2. Montrer que : $\forall x > 0. \quad \sqrt{x} > \ln(x)$
3. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique a_n strictement positive
4. Montrer que : $\forall n \geq 3. \quad \frac{1}{n} < a_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ et déduire la limite de la suite (a_n)

Sujet 8:

1. Montrer que : $\forall x > 0. \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - Lnx < \frac{1}{x}$
2. Soit $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n+n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
   a) Montrer que la suite (u_n) est croissante
   b) Montrer que : $\forall n > 0. \quad \ln(2n+1) - \ln(n+1) < u_n < \ln(2n) - \ln(n)$
   c) Calculer $\lim (u_n)$

Sujet 9: (BAC 2016 – 6,5 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \ln(x) - \frac{n}{x}$

Soit C_n la courbe de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. a) Etudier les deux branches infinies de C_n
   b) Etudier les variations de f_n sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Poser son tableau des variations. Construire C_2
2. Montrer que f_n est bijective de $]0, +\infty[$ vers IR
3. a) Montrer que : $\forall n \geq 1. \ \exists! \alpha_n > 0. \quad f_n(\alpha_n) = 0$
   b) Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$ sur $]0, +\infty[$
   c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante
4. a) Montrer que : $\forall x > 0. \quad \ln(x) < x$
   b) Montrer que $\lim (\alpha_n) = +\infty$
5. Soit F_n une primitive de f_n sur $]0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On pose $I_n = \frac{F_n(\alpha_{n+1}) - F_n(\alpha_n)}{\alpha_{n+1} - \alpha_n}$
   a) Montrer que : $\forall n > 0. \ \exists c_n \in]\alpha_n, \alpha_{n+1}[. \quad I_n = f_n(c_n)$
   b) Montrer que : $\forall n > 0. \quad 0 < I_n < \frac{1}{\alpha_{n+1}}$
   c) Montrer, par l'absurde, que c_n et unique
   d) Déterminer $\lim (I_n)$

Sujet 10: (BAC 2016 – 3,5 points)

1. Soit $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Vérifier que la fonction $t \to \frac{1}{\ln(t)}$ admet des primitives sur $[n,+\infty[$.

   Dans la suite, F désigne une de ces primitives.

   Soit g_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $[n,+\infty[$ par : $g_n(x) = F(x) - F(n)$

2. a) Montrer que g_n est dérivable sur $[n,+\infty[$ et calculer sa dérivée

   b) Montrer que g_n est strictement croissante sur $[n,+\infty[$

3. a) Montrer que : $\forall x \geq n. \quad g_n(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$ (On pourra utiliser l'inégalité $\ln(x) \leq x-1$)

   b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$

4. a) Montre que g_n est bijective de $[n,+\infty[$ vers $[n,+\infty[$

   b) En déduire que : $\forall n \geq 2. \ \exists! u_n \geq n. \quad g_n(u_n) = 1$

5. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie dans la question précédente.

   a) Montrer que : $\forall n \geq 2. \quad F(u_{n+1}) - F(u_n) = F(n+1) - F(n)$

   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante

   c) Calculer $\lim (u_n)$