Fonction Logarithme

Exercice 1 :

1. **Resoudre les equations suivantes**

a- $\ln(2x-1)-\ln(1-x)=0$

b- $\ln(\sqrt{x+2}-1)=0$ c- $1-\ln(1+\sqrt{x})=0$

2. **Resoudre les inequations suivantes**

a- $\ln(x^2+4x+5)>0$

b- $\ln(x-1)\leq\ln(x-5)$ c- $\ln(\ln x)=0$

3. **Simplifier l'ecriture de** $X=\ln\dfrac{60.7^5}{11^2}$

Exercice 2 :

Déterminer les domaines de definition, calculer les derivées et deteminer les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x)=x-Lnx$ / $g(x)=\ln(\sqrt{x}-1)$
2. $h(x)=\ln(\ln x)$ / $a(x)=\dfrac{x}{1-\ln x}$
3. $b(x)=-x+x\ln x$ / $c(x)=\dfrac{x}{Lnx}$

Exercice 3 :

Déterminer les domaines d'étude et donner l'ensemble des solutions des equations ou des inequations ou du systeme suivants :

1. $\ln(2x-1)+\ln(x-e)=1$
2. $2-\ln(1+x)^2=0$
3. $\ln\sqrt{x-1}\leq\dfrac{1}{2}$
4. $\begin{cases}\ln x+\ln y=0\\ x+y=-\sqrt{5}\end{cases}$

Exercice 4 :

1. **Calculer** $\lim\limits_{x\to1^+}\ln\dfrac{x}{x-1}$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x}{x-1}$ **et** $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
2. **Calculer** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x}{x^2+1}$
3. **Calculer** $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x$ **et** $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\ln(x+e)$
4. **Calculer** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^3-1}$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(\sqrt[3]{1-x})}{1-x}$
5. **Calculer** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^3}$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\ln x}{x}$

Exercice 5 :

Soit $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n^2+2u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N}.\quad u_n\in\mathbb{N}^*$
2. On pose $v_n=\ln(1+u_n)$

   a- Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N}.\quad v_n>0$

   b- Montrer que (v_n) est geometrique. En deduire $\lim v_n$
3. On pose $P_n=(1+u_0)(1+u_1).....(1+u_n)$

   Calculer $\ln P_n$ en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

Exercice 6 :

Soient $u_0=0$ et $u_{n+1}=2-\dfrac{4}{u_n+3}$ pour $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N}.\quad 0\le u_n<1$
2. a- Montrer que la suite (u_n) est croissante et est convergente

   b- Calculer $\lim u_n$
3. Soit $v_n=\ln(1-u_n)-\ln(2+u_n)$

   a- Montrer que v_n est arithmetique de raison $-2\ln 2$

   b- Calculer v_n en fonction de n et deduire $\lim v_n$

Exercice 7 :

On considere la suite $u_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

1. a- Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}.\quad \ln u_n=-\ln\dfrac{1-\frac{1}{n}}{\frac{-1}{n}}$

   b- En deduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n$ (Prendre $t=\dfrac{-1}{n}$)
2. Montrer par la meme methode que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{e}$

Exercice 8 :

On donne $u_0=6$ et $u_n=\dfrac{1}{4}u_n+3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

3. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 4
4. Montrer que (u_n) est strictement decroissante
5. Montrer que la suite definie $(\ln(u_n-4))_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmetique
6. Montrer que $u_n=4+\dfrac{2}{4^n}$ pour $n\in\mathbb{N}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
7. a- Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}.\quad 3^n\ge n$

   b- En déduire que $0\le n(u_n-4)\le 2.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ c-

   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n-4)$

Exercice 9 : On donne $u_0=e^3-1$ et $u_{n+1}=\sqrt[3]{1+u_n}-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

On pose $v_n=\ln(1+u_n)$

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_n>0$ et déduire que $v_n>0$
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont decroissantes et vonvergentes
3. Montrer que (v_n) est géométrique et déduire $\lim v_n=0$
4. On pose $\lim u_n=l$. Montrer que $\ln(1+l)=0$. Deduire l
5. Calculer $P_n=\ln\left(\prod_{k=1}^{k=n}(1+u_k)\right)$ et deduire $\lim_{n\to+\infty} P_n$

Exercice 10 : Soient $f(x)=\ln|x(1-x)|$

1. Resoudre $x^2-x=0$ dans $\mathbb{R}$ et deduire D_f
2. Determiner l'intersection de ζ_f et l'axe des abscisses
3. Montrer : $\begin{cases} f(x)=\ln x(1-x) & si \quad 0<x<1 \\ f(x)=\ln x(x-1) & si \quad x<0 \ ou \ x>1 \end{cases}$
4. a- Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}.\quad f(1-x)=f(x)$

   b- En déduire un axe de symetrie de ζ_f
5. Calculer et interreter graphiquement $\lim_{x\to1} f(x)$
6. Determiner la branche infinie de ζ_f au voisinage de $+\infty$
7. a- Montrer que : $\forall x\in D_f.\quad f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x}$

   b- Poser le tableau des variations de f et determiner son signe
8. a- Montrer que : $\forall x\in D_f.\quad f''(x)=\dfrac{-2(x^2+3x+1)}{x^2-x}$

   b- Resoudre dans $\mathbb{R}$ l'equation $f''(x)=0$
9. Poser le tableau de concavité de ζ_f et la representer graphiquement

Exercice 11 : Soient $f(x)=1-\dfrac{1}{x}+\ln x$ et $g(x)=(x-1)\ln x$

1. Calculer $f(1)$ et $g(1)$
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. En deduire la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$
3. Calculer $\lim_{x\to0^+} f(x)$ et interpreter graphiquement le resultat
4. a- Montrer que : $\forall x>0.\quad f'(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$

   b- Poser le tableau des variations de f et determiner son signe
5. Etudier la concavité de ζ_f
6. Representer graphiquement ζ_f dans un repere orthonormé
7. a- Montrer que $\forall x>0.\quad g'(x)=f(x)$

   b- En deduire les variations de g sur $]0,+\infty[$
8. Calculer $g''(x)$ et montrer que la courbe ζ_g est convexe
9. Determiner les branches infinie de ζ_g
10. Representer graphiquement ζ_g dans un repere orthonormé

Exercice 12 :

Soit $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ si $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $f(0)=0$

1. Resoudre l'equation $f(x)=x$
2. a- Montrer que f est continue en 0 a droite

   b- Montrer que f est derivable en 0 a droite
3. Calculer et interpreter $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
4. Determiner la branche infinie de ζ_f au voisinage de $+\infty$
5. a- Montrer que $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$ et $f''(x)=\dfrac{2-\ln x}{x\ln^3 x}$

   b- Déduire le tableau des variations de f et le tableau de concavité de ζ_f
6. Representer graphiquement ζ_f dans un RON
7. On donne $u_0>e$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\ln u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_n>e$

   b- Montrer que la suite (u_n) est decroissante et convergente

   c- Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 13 :

Soit $f(x)=x(-1+\ln x)^2$ si $x>0$ et $f(0)=0$

1. Determiner l'intersection de ζ_f et les axes des coordonnees
2. a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

   b- En deduire la branche infinie de la courbe de f en $+\infty$
3. a- Montrer que : $\forall x>0.\ f(x)=\left(-\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2$

   b- En deduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ et conclure
4. Montrer que ζ_f admet une demi-tangente verticale en 0
5. a- Montrer que : $\forall x>0.\quad f'(x)=-1+\ln^2 x$

   b- Resoudre $f'(x)=0$ et déduire les lieux des tangentes horizontales de ζ_f

   c- Poser le tableau des variations de f
6. a- Montrer que $\forall x>0.\quad f''(x)=2\dfrac{\ln x}{x}$

   b- Determiner un point d'inflexion et la concavité de ζ_f
7. Representer graphiquement la courbe de f

Exercice 14 :

Soit $f(x)=\dfrac{1+Lnx}{1-Lnx}$ si $x>0$ et $f(0)=-1$

1. Déterminer D_f et calculer $f(1)$ et $f\left(e^{-1}\right)$
2. Montrer que f est continue en 0 a droite
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpreter graphique le resultat
4. Montrer que ζ_f admet en e une asymptote verticale
5. a- Montrer que : $\forall\ x>0.\ \ f'(x)=\dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$

   b- Poser le tableau des variations de f et donner son signe
6. Ecrire l'equation de la tangente de ζ_f au point d'abscisse 1
7. a- Montrer que $f''(x)=\dfrac{2}{x^2}f(x)$

   b- Determiner la concavité de ζ_f et ses points d'inflexions
8. Montrer que ζ_f admet en 0 une demi-tangente verticale
9. Représenter graphiquement ζ_f
10. a- Montrer que la restriction g de f a $[0,e]$ admet une reciproque definie sur $[-1,+\infty[$ et derivable et $\left(g^{-1}\right)'(1)$

    b- Representer graphiquement $\zeta_{g^{-1}}$

Exercice 15 :

I. Soit $g(x)=x^2+x-2+2Lnx$ définie sur $]0,+\infty[$

1. Calculer $g(1)$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x>0$
2. Poser le tableau des variations de g et déduire son signe

II. f est définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x+\left(1-\dfrac{2}{x}\right)Lnx$

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter le résultat
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$ et interpréter le résultat
3. Montrer que : $\forall\ x>0.\ \ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$
4. Résoudre l'equation $f(x)=x$ dans $]0,+\infty[$
5. Montrer que $f(x)\leqslant x$ pour tout $x\in[1,2]$
6. Représenter graphiquement ζ_f

III. On donne $u_0=\sqrt{3}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que $1\leqslant u_n\leqslant 2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente
3. Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 16 :

On considere la fonction $f(x)=\ln(1+x^2)$

1. Montrer que ζ_f est symetrique par rapport a (Oy)
2. Determiner l'intersection de ζ_f avec les axes des coordonnérs
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
4. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
5. a- Montrer que : $\forall x>0.\quad \frac{f(x)}{x}=2\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}$

   b- En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

   c- Deduire la branche infinie de ζ_f au voisinage de $+\infty$
6. a- Montrer que f est derivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

   b- Poser le tableau des variations de f
7. Determiner la concavité de ζ_f et precicer ses inflexions
8. Representer graphiquement ζ_f

Exercice 17 :

Soit g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x-1-\ln x$

1. Calculer $g'(x)$ et poser le tableau des variations de g
2. Soit $f(x)=x^2-x\ln x$ si $x\in]0,+\infty[$ et $f(0)=0$
   1. Montrer que f est continue en 0
   2. Etudier et interpreter la derivabilité de f en 0 a droite
   3. Calculer et interpréter $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$
   4. Determiner la branche infinie de ζ_f en $+\infty$
   5. Montrer que $\forall x\in]0,+\infty[.\quad f'(x)=x+g(x)$
   6. Ecrire l'equation de la tangente a ζ_f au point $A_{(1,1)}$
   7. Calculer $f''(x)$. Poser le tableau de concavité de
   8. Représenter graphiquement ζ_f
3. Soit $u_0=0,5$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a- Montrer que $0\leqslant u_n\leqslant 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   b- Montrer que la suite (u_n) est croissante et deduire qu'elle est convergente et calculer sa limite

Exercice 18 :

Partie 1 :

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f(x)=x+\ln 2-\ln(x^2+1)$ On note ζ_f sa courbe representative dans un RON d'unite $3\,cm$

1. a- Montrer que : $\forall\, x<0.\ \ \ln(x^2+1)=2\ln(-x)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

   b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

2. a- Montrer que : $f(x)=\ln 2+x\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

   b- En deduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

3. Montrer que ζ_f admet deux branches paraboliques de direction la droite $(\Delta): y=x$

4. a- Poser le tableau de signe de $f(x)-x$ sur $\mathbb{R}$

   b- Déterminer la position de ζ_f par rapport a (Δ) sur $\mathbb{R}$

5. Montrer que $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ et déduire la monotonie de f s

6. Quelle est la nature de la tangente (T_1) de ζ_f en 1 ?

7. Montrer que $f''(x)=\frac{(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

8. Poser le tableau de concavité de ζ_f et preciser ses d'inflexions

9. Ecrire l'equation de la tangente (T_2) de ζ_f en -1

10. Montrer que ζ_f coupe (Ox) en un unique point dont l'abscisse ω vérifie $-1<\omega<0$

11. a- Poser le tableau des variations de f

    b- Représenter graphiquement (Δ) et (T_1) et (T_2) et ζ_f

Partie 2 :

On considere la suite $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

12. a- Montrer que $f([-1,1])=[-1,1]$

    b- En déduire que : $\forall\, n\in\mathbb{N}.\ \ u_n\in[-1,1]$

13. Montrer que la suite (u_n) est monotone et preciser sa monotonie

14. Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite