Généralités sur les fonctions

Br-Rachid www.sc-math.e-monsite.com

Dans toute la suite, Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Sujet 1:

Soient les fonctions numériques à variable réelle données par $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x-2}}$ et $g(x)=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-2}}$

1. Ecrire en compréhension les domaines de définition D_f et D_g des fonctions f et g
2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x-1}{x-2}\geqslant 0$

   b) En déduire D_f sous forme de réunion d'intervalles
3. a) Ecrire D_g sous forme de réunion d'intervalles

   b) Les fonctions f et g sont-elles égales ?

Sujet 2:

Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

1. Déterminer D_f, le domaine de définition de f
2. Déterminer l'intersection du graphique de f avec les axes de coordonnées
3. Montrer que le graphique de f est en dessus de l'axe des abscisses
4. a) Montrer que f est majorée par $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ sur $]1,+\infty[$. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ est-elle une valeur maximale de f ?

   b) Déduire que f est bornée. Quelle interprétation graphique donner à cela
5. Etudier la monotonie de f puis poser le tableau des variations de f
6. Montrer que $f(]1,+\infty[)=\left]0,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right[$
7. Montrer que la restriction g de f à $]1,+\infty[$ est bijective de $]1,+\infty[$ vers $\left]0,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right[$. Déterminer g^{-1}

Sujet 3:

Soit $f(x)=x^2+2$ et $g(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ deux fonctions numériques à variables réelles

1. Etudier la parité de f puis montrer que g n'est ni paire ni impaire
2. Montrer que la droite $(x=0)$ est un axe de symétrie de C_f et que le points $A(1,2)$ est un centre de symétrie de C_g
3. Poser le tableau des variations de chacune des fonctions f et g
4. Donner le signe de g
5. Soit : $h(x)=fog(x)$

   a) Déterminer le domaine de définition de h et calculer l'expression $h(x)$

   b) Déterminer les variations de h sur chacun des intervalles $]1,+\infty[$ et $\left]\dfrac{-3}{2},1\right[$ et $\left]-\infty,\dfrac{-3}{2}\right[$

Sujet 4:

Soit $f(x)=x^2+2x$ et $g(x)=\sqrt{1+x}-1$ deux fonctions numériques à variables réelles

1. Poser les tableaux de variations des fonctions f et g puis les représenter graphiquement
2. Montrer graphiquement que : $f([-1,+\infty[)=[-1,+\infty[$
3. Définir les fonctions fog et gof. Sont-elles égales ?
4. Montrer que g est bijective de $[-1,+\infty[$ vers $[-1,+\infty[$. Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$
5. Montrer que les courbes de f et de g sont symétriques par rapport à la droite $(y=x)$

Sujet 5:

Soit $f(x)=x(1-x)$ une fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. f est-elle injective ? strictement monotone ?
2. Montrer que : $\forall x\in[0,1]$. $0\le f(x)\le\frac{1}{4}$. Vérifier si 0 et $\frac{1}{4}$ sont des extremums de f
3. Représenter graphiquement la courbe C_f
1. Soit $m\in IR$. Déduire du graphique de f le nombre de solution de l'équation $f(x)=m$
4. Soient $(a,b,c)\in[0,1]^3$. Montrer que $min(a(1-b),b(1-c),c(1-a))\le\frac{1}{4}$

Sujet 7:

Soit $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

1. Déterminer D_f
2. Soit $g(x)=(f(x))^2$. Déterminer les variations de g et déduire celles de f
3. Montrer que $f(]1,+\infty[)=]0,1[$
4. Soit h la restriction de f à $]1,+\infty[$. Montrer que h est bijective de $]1,+\infty[$ vers $]0,1[$ et déterminer h^{-1}

Sujet 8:

Soit $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

1. Déterminer les variations de f sur $]1,+\infty[$ et sur $[0,1[$
2. Montrer que f est minorée par 1 sur $]1,+\infty[$
3. Soit g la restriction de f à $]1,+\infty[$ et h la restriction de f à $[0,1[$.
   a. Montrer que : $0<x<1 \Rightarrow h(x)=-g(\frac{1}{x})$
   b. Montrer que g est bijective de $]1,+\infty[$ vers $]1,+\infty[$. Déterminer sa réciproque g^{-1} .
   c. Déduire que h est bijective de $[0,1[$ vers $]-\infty,-1[$ déterminer h^{-1} en fonction de g^{-1}

Sujet 9:

Soient $f(x)=x+4\sqrt{x+1}+2$ et $h(x)=\sqrt{x+1}$ définie sur $[-1,+\infty[$

1. Déterminer la fonction g définies telle que $f=goh$. Préciser D_g
2. Représenter graphiquement les courbes de f et de g
3. Poser le tableau des variations de f

Sujet 10:

1. a) Soit $u(x)=x^2-x$. Poser le tableau des variations de u puis représenter graphiquement la courbe de u

   b) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x^2=x+m$ avec $m\in\mathbb{R}$

   c) Préciser en particulier les solutions de l'équation dans le cas $m=\frac{1}{2}$
2. Soit $f(x)=x^4-2x^3+x$.

   a) Montrer que : $\forall x\in IR.\quad f(x)=(x^2-x)^2-(x^2-x)$

   b) Déterminer les variations de f sur IR et poser son tableau des variations

Sujet 11:

1ere partie : Soit la fonction $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

1- Déterminer le domaine de définition de f puis montrer que $\forall x\geq 1.\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$

2- Montrer que f est minorée par 0. 0 est-elle une valeur minimale de f ?

3- Montrer que f est majorée par 1 et que 1 est une valeur maximale de f

4- Montrer que : $\forall(a,b)\in[1,+\infty[\times[1,+\infty[.\quad [a<b \Rightarrow f(a)>f(b)]$. Conclusion ?

2eme partie

1- Montrer que : $f([1,+\infty[)=]0,1]$

2- On considère l'application $u:[1,+\infty[\to]0,1]$ définie par : $\forall x\in[1,+\infty[.\quad u(x)=f(x)$

Montrer que u est une application bijective

3- Soit l'application: $v:]0,1]\to[1,+\infty[$ définie par : $\forall x\in]0,1].\quad v(x)=\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

a) Déterminer le domaine de définition de vou et celui de uov. Calculer $vou(x)$ et $uov(x)$

b) Déterminer l'application réciproque u^{-1}

3eme partie : Soit $g(x)=\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2-1}$

1- Déterminer le domaine de définition de g. Montrer que g est paire et interpréter ce résultat

2- Ecrire g sous forme d'un composé de f et d'une fonction w à déterminer

3- déduire les variations de g sur $[1,+\infty[$ puis sur $]-\infty,-1]$

Sujet 12:

Soient $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ et $h(x)=\dfrac{2x-x^2}{(x-1)^2}$ les applications définies sur $IR\setminus\{1\}$

1. Montrer que : $\forall x\in IR\setminus\{1\}.\quad f(x)\neq 1$.
2. Déduire que fof est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ puis calculer $fof(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$
3. Représenter graphiquement la courbe de f
4. puis déterminer $f(]-\infty,1[)$ et $f(]1,+\infty[)$
5. Déterminer une application g sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ telle que $h=gof$
6. Donner le tableau des variations de h sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Sujet 13:

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{-x^2}{x^2+1}$

1. Donner D_f et montrer que f est une application paire
2. a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}.\quad f(x)=-1+\dfrac{1}{x^2+1}$

   b) Résoudre $f(x)=-1$
3. Montrer que f n'est ni injective ni surjective
4. a) Montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$

   b) Donner le tableau des variations de f . Préciser la valeur maximale absolue de f

   c) Montrer que $f(\mathbb{R})=]-1,0]$ et déduire que f est bornée

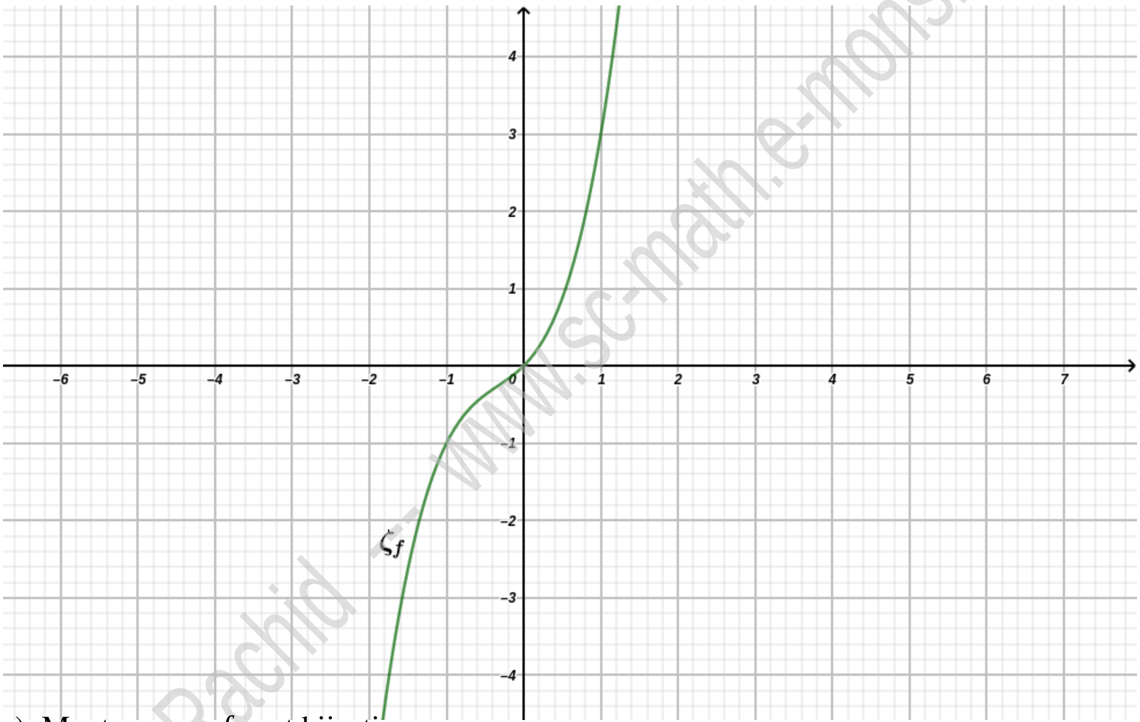
   d) Montrer, par l'absurde, que f n'a pas de valeur minimale absolue
5. Soit $g:\mathbb{R}^+\to]-1,0]$ avec $g(x)=\dfrac{-x^2}{x^2+1}$. Montrer que g est bijective. Définir sa réciproque
6. a) Déterminer deux applications u et v telles que $f=vou$

   b) Retrouver les variations de f à partir de celle de u et v
7. Soit $a(x)=\dfrac{-x^2-x+\frac{1}{4}}{x^2+x+\frac{5}{4}}$. Déterminer une fonction b définie sur $\mathbb{R}$ telle que $fob=a$
8. Soit $h(x)=\cos(\pi f(x))$. Poser le tableau des variations de h

Sujet 14:

Soit l'application $f(x)=x^3+x^2+x$

1. Montrer que $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2. \quad x^2+x(1+y)+y^2+y+1>0$
2. a) Calculer le taux d'accroissement de f .
   b) Déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que f est injective
4. On donne la courbe de f
   a) Déterminer à partir du schéma $f([-1,1])$ et $f(\mathbb{R})$ et l'image réciproque $f^{-1}([0,3])$
   b) Représenter dans le même schéma les courbes de $a(x)=f(x)-1$ et de $b(x)=-f(x)$



5. a) Montrer que f est bijective
   b) Représenter dans le même schéma la courbe de f^{-1}
6. On définit l'application h de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}^{+*}$ par : $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   a) Montrer que h est bijective et définir sa réciproque
   b) Déterminer la monotonie de h
7. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $g(x)=\dfrac{1+x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$
   a) Montrer que : $\forall x\in \mathbb{R}^{+*}. \quad foh(x)=g(x)$
   b) Déduire la monotonie de g sur $\mathbb{R}^{+*}$

8. Montrer que g est bijective. Ecrire $g^{-1}(x)$ en fonction de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$

Sujet 15:

Soit f une fonction bijective de I vers J avec I et J deux parties de $\mathbb{R}$

1. On suppose que f est impaire
   a) Montrer que : $\forall y \in J. \quad (-y) \in J$
   b) Montrer que f^{-1} est impaire
   c) Peut-on conclure un résultat similaire dans le cas ou f est une fonction paire ???!!!
2. Dans cette question, on prend f strictement monotone
   a) Montrer que $T_{f^{-1}} = \dfrac{1}{T_f}$
   b) Déduire une comparaison entre les monotonies de f et de f^{-1}
3. a) Quelle relation de symétrie lie les points $M(a,b)$ et $N(b,a)$?
   b) Déduire les positions relatives des courbes de f et de f^{-1}

Sujet 16:

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \dfrac{E(\sqrt{x})}{E(\frac{3-x}{x})}$ et de $g(x) = \dfrac{1+x\sqrt{x}}{\sqrt{1-E(\frac{3-x}{x})}}$

Sujet 17:

1. Résoudre dans IR les équations : $\left[2x+\dfrac{1}{3}\right]=4$ et $\left[x^2+2x-1\right]=\dfrac{x+1}{2}$ et $\left[\dfrac{2x^2+x}{2}\right]=\dfrac{x}{3}$
2. Résoudre dans IR les inéquations : $\left[3x^2+x-2\right] \leq \dfrac{7}{5}$ et $\left[|2x+1|\right] \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. Résoudre dans IR: $E(x)-3E(3x)-2=0$
4. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} E\left(\frac{k+\sqrt{k}}{k}\right)$ et $E\left(\dfrac{n^2+2n+4}{n+1}\right)$

Sujet 18:

Soit f la fonction définie par : $f(x)=E(x)+E\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-E(2x)$

1. Montrer que f est $\dfrac{1}{2}$-périodique
2. Déduire que : $\forall x \in IR. \quad E\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=E(2x)-E(x)$
3. Montrer que : $\forall x \in IR. \quad E\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+E\left(\dfrac{x+2}{4}\right)+E\left(\dfrac{x+4}{8}\right)=E(x)-E(\frac{x}{8})$

4. Montrer, par récurrence, que : $\forall x \in IR.\quad \sum_{k=0}^{k=n} E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right)=E(x)-E\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$

Sujet 19:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=(x-E(x))(E(x)-x+2)$

1. Calculer $f(k)$ pour tout k entier relatif
2. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[0,1[$
3. Montrer que f est périodique et que 1 en est une période
4. Représenter graphiquement la courbe de la restriction de f à $[-1,3]$

Sujet 20:

1. Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques et en donner une période :
   $f(x)=\cos 3x$; $g(x)=\cos 3x+\sin 2x$ et $h(x)=tg(2x+1)$
2. Soit f définie de IR vers $IR\setminus\{1\}$ par $f(x+1)=\dfrac{1}{1-f(x)}$.
   a) Calculer et simplifier $f(x+2)$ et $f(x+3)$
   b) Montrer que f est périodique et en donner une période

Sujet 21:

Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x-1}$
Soit f la fonction dont la courbe et la parabole de sommet $\Omega(1,2)$ et passant par $A(2,1)$

1. Donner l'expression de $f(x)$
2. Définir la fonction h , le prolongement de g à $\mathbb{R}\setminus]-1,1[$ sachant que h est impaire
3. Vérifier que les courbes de f et de g se coupent en A
4. Représenter graphiquement les courbes de f et de g
5. Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2-2x-1+\sqrt{x-1}<0$

Sujet 22:

Soit $f(x)=x^2+x+1$ définie sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que la courbe (C_f) admet la droite $(D): x=\dfrac{-1}{2}$ comme axe de symétrie
2. Montrer que f n'est pas injective
3. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}.\quad f(x)\geq\dfrac{3}{4}$. f est-elle surjective ?
4. Représenter graphiquement la parabole d'équation $y=f(x)$. Déduire graphiquement $f(\mathbb{R})$
5. Déterminer deux intervalles I et J tels que l'application $g: I \to J$ donnée par $g(x)=x^2+x+1$ est bijective et définir sa réciproque g^{-1}

6. Soit la fonction $h(x)=f(|x|)$
   Montrer que h est pair et représenter dans le même repère le graphique (C_h)

Sujet 23:

Soit $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$

1. Déterminer D_f , le domaine de définition de f
2. Montrer que la courbe (C_f) admet le point $A(2,3)$ comme centre de symétrie
3. a) Déterminer $f^{-1}\{3\}$
   b) Montrer que l'application $g:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$ telle que $g(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$ n'est pas surjective
4. Représenter graphiquement l'hyperbole (C_f)
5. Montrer que l'application $h:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$ avec $h(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$ est bijective et déterminer h^{-1}

Sujet 24:

1. a) Compléter $\cos(\pi-x)=$....................... et $\cos(2\pi-x)=$.......................
   $\sin(\pi-x)=$....................... et $\sin(2\pi-x)=$.......................
   $\tan(\pi-x)=$....................... et $\tan(2\pi-x)=$.......................
   b) Déduire des éléments de symétrie des courbes des fonctions $\cos$ et $\sin$
2. En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer :
   a) La monotonie de la fonction $\cos$ sur $[0,\pi]$
   b) Le calcul de $\cos([0,\pi])$
3. En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer :
   a) La monotonie de la fonction $\sin$ sur $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
   b) Le calcul de $\sin\left([\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\right)$
4. En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer :
   a) La monotonie de la fonction $\tan$ sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
   b) Le calcul de $\tan\left(\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$

Sujet 25:

Soit la fonction définie sur R – {1} par : $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$

1. Déterminer D_f , le domaine de définition de f
2. Montrer que $\left(C_f\right)$ admet un centre de symétrie en un point d'abscisse 1