## Sujet 1:

1. L'ensemble $I = ]-1,1[$ est muni de la loi de composition $T$ définie par $\forall (x, y) \in I.\quad xTy = \dfrac{x+y}{1+xy}$
   Montrer que est un groupe abéliens
2. Résoudre dans $I$ l'équation : $xT2 = \dfrac{1}{2}$

## Sujet 2 :

1. Pourquoi $M_2(\mathbb{R})$ muni de la multiplication des matrices n'est pas un groupe ?
2. On considère le sous ensemble $E$ de $M_2(\mathbb{R})$ qui s'écrivent sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

   a) Montrer que $(E, +)$ est un groupe commutatif

   b) Résoudre dans $E$ l'équation : $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

## Sujet 3 :

Soient E un ensemble fini non vide et P(E) l'ensemble des parties de E. On note $A \Delta B$ la différence symétrique des parties A et B de E

1. Montrer que $(P(E), \Delta)$ est un groupe commutatif
2. Résoudre dans P(E) l'équation $A \Delta X = B$

## Sujet 4 :

Soit $G = \{(x, y) \in IR^2.\quad x \neq -1\}$. On munit G de la loi de composition définie par :

$$(x, y) * (a, b) = (x + a + ax, y + b)$$

1. a) Montrer que $G$ muni de la loi * est un groupe commutatif

   b) On note $(x, x)^n$ le composé $\text{n}^{\text{ieme}}$ de $(x, x)$ .

   Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}.\ \forall n > 0.\quad (x, x)^n = ((1+x)^n - 1, nx)$

   c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ . Résoudre dans $G$ l'équation : $(x, x)^n = (2^n - 1, n)$ d'inconnu $(x, x)$
2. Soit l'ensemble $H = \{(x, \ln(x+1)).\quad x > -1\}$

   a) Montrer que $H$ est inclus dans $G$

   b) Montrer que $H$ muni de la loi * est un aussi un groupe abélien

## Sujet 5:

1. Montrer que $Z/nZ$ avec $n \in \mathbb{N}$ non nul, est un groupe additif commutatif
2. Résoudre dans $Z/8Z$ l'équation $2x = 1$. Déduire que $(Z/nZ, \times)$ n'est pas un groupe
3. On se place maintenant dans $Z/7Z$

   a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} - \{0\}. \exists y \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.\quad xy = 1$

   b) Montrer que $Z/7Z$ est un groupe multiplicatif abélien

**Sujet 6 :**

Soit $(E,\star)$ un ensemble fini muni d'une $LCI$ associative, commutative et admettant un élément neutre $e$.

Soit $a$ un élément régulier de $E$ et soit $g$ l'application de $E$ dans lui-même telle que :

$\forall x \in E. \quad g(x) = x * a$

1. Montrer que $g$ est injective. Déduire que $g$ est bijective
2. On suppose que tout élément de E est régulier. Montrer que $(E,\star)$ est un groupe abélien

**Sujet 7 :**

Soit $(E,\star)$ un ensemble muni d'une loi associative, commutative et d'élément neutre $e$.

On note $Inv(E)$ l'ensemble des éléments inversibles de $E$ par la loi $\star$

1. Montrer que $Inv(E) \neq \phi$
2. Montrer que $(Inv(E),\star)$ est un groupe commutatif
3. On munit $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ de la multiplication.

   a) Montrer que $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe

   b) Déterminer un sous ensemble de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ qui soit un groupe commutatif pour la multiplication

———— . . . . . . . . . . ————

**Sujet 8:**

On utilisant la propriété caractéristique d'un sous groupe (avec précision du groupe parent), montrer que :

1. $\{a^m \in \mathbb{R}. \quad m \in \mathbb{Z}\}$ est un groupe multiplicatif abélien. $(a \in IR^*)$
2. $U = \{z \in \mathbb{C}. \quad |z| = 1\}$ est un groupe multiplicatif abélien.
3. $V = \{z \in \mathbb{C}. \quad z^n = 1\}$ est un groupe multiplicatif abélien.
4. $Z[i] = \{a + bi \in \mathbb{C}. \quad (a,b) \in \mathbb{Z}^2 - \{0\}\}$ avec $i^2 = -1$ est un groupe abélien multiplicatif.
5. $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}. \quad x \in \mathbb{R}^* \right\}$ est un groupe multiplicatif abélien
6. l'ensemble des applications bijectives de IR dans IR muni de la loi « composé de deux applications » est un groupe

**Sujet 9:**

A- Soit $a\in\mathbb{N}$ non nul. On pose $a\mathbb{Z}=\{am. \quad m\in\mathbb{Z}\}$.

1- a) Montrer que $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$

b) Montrer que : $\forall(a,b)\in Z^2. \quad (a/b \quad\Leftrightarrow\quad b\mathbb{Z}\subset a\mathbb{Z})$

2- Soient $a$ et $b$ deux entiens naturels non nuls. On pose $(a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z})=\{au+bv. \quad (u,v)\in\mathbb{Z}^2\}$.

Montrer que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$

B- Soit $H$ un sous-groupe additif non trivial de $Z$. Soit

1- Montrer que $H\cap\mathbb{Z}^+\neq\emptyset$. Dans toute la suite, on pose $b=min(H\cap\mathbb{Z}^+)$

2- a) Vérifier que $\forall m\in Z. \quad bm\in H$

b) Soient $x\in H$ et $r$ le reste de la division euclidienne de $x$ par $b$. Montrer que $x\equiv 0[b]$

c) Quels sont les sous-groupes additifs de $(\mathbb{Z},+)$ ?

C- Montrer que $n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z}=(ppmc(n,m))\mathbb{Z}$ et que $n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}=(pgdc(n,m))\mathbb{Z}$

**Sujet 10:**

On rappel que l'ensemble $F(IR,IR)$ des fonctions muni de l'addition est un groupe commutatif. On note P et I respectivement les ensembles des fonctions paires et des fonctions impaires.

1- Montrer que $(P,+)$ et $(I,+)$ sont deux sous-groupes abéliens de $F(IR,IR)$ tel que $P\cap I=\emptyset$

2- Pour $f\in F(IR,IR)$ , on pose : $p(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

Montrer que $p\in P$ et que $i\in I$ et que $f=i+p$

**Sujet 11:**

1. Montrer que l'ensemble des permutation de $\mathbb{C}$ muni de la composition des applications est un groupe
2. Soit $f_a(z)=z+a$ définie sur $\mathbb{C}$ avec $a$ un nombre complexe

   a) Montrer que $f_a$ est bijective et préciser sa réciproque

   b) $F_a$ est la transformation du plan associée à $f_a$. Déterminer la nature de $F_a$
3. Soit $G=\{f_a. \quad a\in\mathbb{C}\}$. Montrer que $G$ est un groupe non commutatif

**Sujet 12:**

On pose $I=]0,+\infty[$ et on rappel que $(I,\times)$ est un groupe abélien.

1. Montrer que : $\forall x,y\in I.\quad e^{x+y}-e^{x}-e^{y}+2>1$
2. Montrer que la loi définie sur $I$ par $x\perp y=Ln(e^{x+y}-e^{x}-e^{y}+2)$ est une loi interne dans $I$
3. Soit la fonction définie sur $I$ par : $f(x)=\ln(x+1)$
   Montrer que $f$ est bijective de $I$ vers un intervalle à déterminer et déterminer $f^{-1}$ sa réciproque
4. a) Montrer que $f$ est un isomorphisme de $(I,\times)$ vers $(I,\perp)$. Déduire la structure de $(I,\perp)$
   b) Déterminer $y'$ , le symétrique de $y\in I$ pour la loi $\perp$
5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer en fonction de $n$ le composé n[ieme] de $y\in I$ : $\underbrace{y\perp y\perp y\perp\ldots\ldots\ldots\perp y}_{n\,fois}$

**Sujet 13 :**

Dans $\mathbb{C}$ , on considère la LCI définie par : $\forall(u,v)\in\mathbb{C}^{2}.\quad u\ast v=uv+i(u+v)-(1+i)$

1- Montrer que $\mathbb{C}-\{-i\}$ est une partie stable de $(\mathbb{C},\ast)$

2- Soit l'application $\varphi$ de $\mathbb{C}^{*}$ vers $\mathbb{C}-\{-i\}$ telle que $\varphi(z)=z-i$

a) Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^{*},\times)$ vers $(\mathbb{C}-\{-i\},\ast)$.

b) Déduire la structure de $(\mathbb{C}-\{-i\},\ast)$ et ses éléments caractéristiques

**Sujet 14 :**

1- Soit $a\in IR^{*}$. Montrer que l'application $f_a:IR^{2}\to IR^{2}$ tel que $f_a(x,y)=(ax,\frac{y}{a})$ est bijective.

2- Soit $E=\{f_a\ /\ a\in IR^{*}\}$. Montrer que $o$ (composé d'applications) est une loi de composition dans $E$

3- Soit l'application : $\begin{cases}h:\ IR^{*}\to E\\ \quad a\to f_a\end{cases}$. Montrer que $h$ est un isomorphisme de $(IR^{*},\times)$ vers $(E,o)$ .

Déduire la structure et les éléments caractéristiques de $(E,o)$

**Sujet 15 :**

Pour tout $x$ et $y$ éléments de l'intervalle $I=]0,1[$, on pose : $x\ast y=\dfrac{2xy}{(1-x)(1-y)+2xy}$

1- Montrer que $\ast$ est une loi de composition interne dans $I$

2- Soient $x$ et $y$ de $I=]0,1[$. Montrer que $\dfrac{1-x}{1+3x}\in I$ et calculer $\dfrac{1-x}{1+3x}\ast x$

3- Soient $x$ et $y$ de $IR^{+*}$. Montrer que $\dfrac{x}{x+2}\in I$ et que $\dfrac{x}{x+2}\ast\dfrac{y}{y+2}=\dfrac{xy}{xy+2}$

4- Soit $f$ la fonction définie sur $IR^{+*}$ par : $\forall t>0.\quad f(t)=\dfrac{t}{t+2}$ .

Montrer que $f$ est un isomorphisme de $(IR^{+*},\times)$ vers $(I,\ast)$

5- Montrer que $(I,\ast)$ est un groupe commutatif. Préciser son élément neutre et le symétrique de $x\in I$

6- Donner l'expression en fonction de $x$ de $\underbrace{x\ast x\ast x\ast\ldots\ldots\ast x}_{n\,fois}\ (n\in\mathbb{N}^{*})$

7- Résoudre dans $I$ l'équation : $\left(\underbrace{x\ast x\ast x\ast\ldots\ldots\ast x}_{n\,fois}\right)-\dfrac{1}{2}=0$

8- On pose $K=\left\{\dfrac{a}{a+2b}.\quad (a,b)\in(\mathbb{N}^{*})^{2}\right\}$. Montrer que $K$ est un sous-groupe de $(I,\ast)$

## Sujet 16:

On considère l'ensemble des matrices $G=\left\{M_\theta=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\theta & -sin\theta\\ 0 & sin\theta & cos\theta\end{pmatrix} \quad / \quad \theta\in IR\right\}$

1. Montrer que $G$ est stable par la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$

2. On considère le groupe multiplicatif $(U,\times)$ tel que $U=\{e^{ix} \ / \ x\in\mathbb{R}\}$ .

   Soit $f$ l'application de $(U,\times)$ vers $(G,\times)$ tel que $f(e^{ix})=M_x$

   a) Montrer que $f$ est un morphisme bijectif de $(U,\times)$ vers $(G,\times)$

   b) Déduire que $(G,\times)$ est un groupe commutatif

3. Déterminer $M_x^{-1}$ et $M_x^{\ n}$ avec $n\in\mathbb{Z}^*$

## Sujet 17:

Soit $G=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x\\ x & 1+\frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}x^2\\ -x & -\frac{1}{2}x^2 & 1-\frac{1}{2}x^2\end{pmatrix} . \quad x\in IR\right\}$

1. Déterminer deux éléments $U$ et $V$ de $M_3(\mathbb{R})$) tels que : $M(x)=I+xU+\frac{1}{2}x^2V$

   1- Vérifier que $U^2=V$ et calculer $UV$ et $VU$

   2- Montrer que $U^3=O$ et déduire que $U$ n'est pas inversible

   3- Montrer, en factorisant $I-U^3$ , que $I-U$ est inversible et déterminer son inverse

   4- Montrer que l'application $f$ telle que $f(x)=M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(G,\times)$

   5- Montrer que $(G,\times)$ est un groupe commutatif

   6- Déterminer l'inverse de $M(x)$ puis calculer $(M(x))^n$ avec $n\in Z$

## Sujet 18:

### Partie 1 :

Montrer que $GL_3(IR)$ , l'ensemble des matrices inversibles de $(M_3(IR), \times)$, est un groupe

### Partie 2 :

Soients $M(a,b)=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix}$ et $H=\{M(a,b)\in(M_3(IR),\times). \quad (a,b)\in IR\times IR^*\}$

1. Montrer que $M(a,b)$ n'est pas inversible dans $(M_3(IR),\times)$

   ( Attention : Ne pas utiliser le déterminant de la matrice!!!)

2. Montrer que $H$ est stable dans $(M_3(IR),\times)$ et vérifier que $\times$ n'est pas commutative dans $H$
3. Montrer que $\times$ admet un élément neutre dans $H$ et le déterminer
4. Montrer que tout élément de $H$ admet un inverse dans $H$
5. Déduire que $(H,\times)$ est un groupe
6. $(H,\times)$ est-il un sous-groupe de $(GL_3(IR),\times)$ ?

### Partie 3 :

On munit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ de la loi de composition interne : $(a,b)*(c,d)=(c+2ad, 2bd)$

Soit l'application $f$ de $H$ vers $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ telle que $f(M(a,b))=(a,b)$

1. a) Montrer que $f$ est un isomorphisme de $(H,\times)$ vers $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

   b) Déduire que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est un groupe non commutatif

   c) Déterminer le neutre de $*$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ et le symétrique de tout élément $(x,y)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

## Sujet 19 :

Soit G un groupe noté multiplicativement.

Pour a ∈ G, on note $\varphi_a$ l'application de G vers G définie par $\varphi_a(x)=axa^{-1}$

1. a) Montrer que $\varphi_a$ est un morphisme du groupe (G, ×) dans lui-même

   b) Dans le cas particulier ou (G, ×) est commutatif, déterminer $\varphi_a$

2. Vérifier que : $\forall(a,b)\in G^2. \quad \varphi_a \ o \ \varphi_b=\varphi_{ab}$
3. Montrer que $\varphi_a$ est bijective et déterminer son application réciproque
4. En utilisant un morphisme approprié, déduire que $T=\{\varphi_a \ / \ a\in G\}$ muni de la composition des applications est un groupe commutatif

**Sujet 20 :** Soit : $H=\left\{M_x=\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} . \quad x\in IR\right\}$

1. a) Montrer que $(H,+)$ est un sous-groupe de $(M_2(IR),+)$

   b) Définir sur $IR$ une loi de composition interne $T$ pour que l'application $f$ telle que $f(x)=M_x$ soit un morphisme de $(IR,T)$ vers $(M_2(IR),\times)$

2. a) Montrer que $H$ est stable dans $(M_2(IR),\times)$

   b) Montrer que $(H^*,\times)$ est un groupe commutatif. En donner les éléments caractéristiques

   c) Donner l'expression de $(M_x)^n$ en fonction de $n\in\mathbb{N}^*$

   d) $(H^*,\times)$ est-il un sous-groupe du groupe des matrices inversibles $(GL_2(IR),\times)$?

**Sujet 21 :**

1. Montrer que la loi $\star$ définie dans $I=]-1,1[$ par : $\forall (x,y)\in I.\quad x\star y=\dfrac{x+y}{1+xy}$ est interne dans $I$

2. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t\in\mathbb{R}.\quad f(x)=\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$

   a) Montrer que $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers $I$ et donner l'expression de $f^{-1}(t)$ pour tout $t\in I$

   b) Montrer que $f$ est un isomorphisme $(\mathbb{R},+)$ vers $(I,\star)$

3. a) Montrer que $(I,\star)$ est un groupe commutatif

   b) Préciser son élément neutre et le symétrique $x'$ d'un élément $x$ de $I$

   c) Soit $n\in\mathbb{N}$ non nul. Donner l'expression du composé n^ieme^ $\underbrace{x\star x\star x\star.........\star x}_{n\,fois}$ de $x\in I$

4. Pour $a\in\mathbb{R}^{+*}$, On pose $H_a=\left\{\dfrac{a^n-1}{a^n+1}.\quad n\in\mathbb{Z}\right\}$ Montrer que $H_a$ est un sous-groupe de $(I,\star)$

5. Pour tout $x\in I$, on pose $M_x=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}$. Soit $E=\{M_x \;/\; x\in I\}$

   a) Montrer que $E$ est une partie stable de l'ensemble $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

   b) Montrer que l'application $g: x\to M_x$ est un isomorphisme de $(I,\star)$ vers $(E,\times)$

   c) En déduire la structure de $(E,\times)$

   d) Déterminer l'inverse $(M_x)^{-1}$ de $M_x\in E$

   e) Calculer en fonction de $n\in\mathbb{N}^*$ la puissance n^ieme^ $(M_x)^n$ de $M_x$

**Sujet 22:**

Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3. On pose $J=A+I$ avec $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer, par récurrence $J^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ . Déduire que $J$ n'est pas inversible
2. Montrer que $A^2=A+2I$. Déduire que $A$ est inversible et calculer son inverse $A^{-1}$
3. Construire, par récurrence deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad A^n=u_n A+v_n I$
4. On pose : $\alpha_n=2u_n+v_n$ et $\beta_n=u_n-v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
5. a) Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques et déduire $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$

   b) Calculer $A^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

**Sujet 23 : (Bacc 2012 – Session ordinaire)**

On définit sur l'intervalle $I=]1,+\infty[$ la loi $\ast$ par : $\forall(x,y)\in I^2.\quad x\ast y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$

1. Vérifier que : $\forall(x,y)\in I^2.\quad x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1$ b
2. Montrer que $\ast$ est une loi de composition interne dans $I$
3. On rappel que $(\mathbb{R}^{+*},\times)$ est un groupe commutatif.

   On considère l'application $\varphi$ de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $I$ telle que : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}.\quad \varphi(x)=\sqrt{x+1}$

   a) Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{+*},\times)$ vers $(I,\ast)$

   b) Déduire que $(I,\ast)$ est un groupe commutatif. Préciser son élément neutre
4. Déterminer le symétrique de tout $x\in I$ et le composé n$^{\text{ieme}}$ $\underbrace{x\ast x\ast.....\ast x}_{n\ \text{fois}}$
5. Soit $\mathrm{H}=\{\sqrt{1+2^n}.\quad n\in\mathbb{Z}\}$ . Montrer que $H$ est un sous groupe de $(I,\ast)$

**Sujet 24: (Bacc 2012 – 2$^{\text{ieme}}$ Session)**

On définit sur l'intervalle $I=[1,+\infty[$ la loi $\ast$ par : $\forall(x,y)\in I^2.\quad x\ast y=(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1)^2$

1. Montrer que $\ast$ est une loi de composition interne dans $I$
2. Montrer que $\ast$ est associative et commutative dans $I$
3. Montrer que $\ast$ admet un élément neutre dans $I$
4. $(I,\ast)$ est-il un groupe ?
5. Montrer que tous les éléments de $I$ sont réguliers pour la loi $\ast$
6. Résoudre dans $(I,\ast)$ l'équation $\sqrt[3]{x}\ast\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ast\sqrt[3]{x}$

**Sujet 25 :** (Bacc 2010 – S.rattrapage)

Soit $E=\left\{M_x=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ x^2 & 2x & 1\end{pmatrix}.\quad x\in\mathbb{R}\right\}$

1. Montrer que $E$ est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}),\times)$
2. Montrer que $(E,\times)$ est un groupe commutatif
3. Résoudre dans $E$ l'équation $A^5X=B$ avec $A=M_2$ et $B=M_{12}$
4. Montrer que $\{M_{\ln(x)}.\quad x\in\mathbb{R}^{+*}\}$ est un sous groupe de $(E,\times)$