Sujet 1:

On considère l'application * de $IR \times IR$ vers IR définie par : $\forall x, y \in IR. \quad x * y = \ln(e^x + e^y)$

1- Montrer que * est une loi de composition interne dans IR

2- Montrer la commutativité et l'associativité de * dans IR

3- Montrer que * n'admet pas d'élément neutre dans IR .

4- Déterminer les éléments réguliers dans IR muni de la loi *

Sujet 2 :

On considère l'ensemble $I =]-1,1[$

1. a) Montrer que : $\forall x, y \in I. \quad \dfrac{x+y}{1+xy} \in I$

   b) Déduire que la loi T définie dans I par : $xTy = \dfrac{x+y}{1+xy}$ est interne dans I

2. Vérifier que T est commutative et associative dans $I =]-1,1[$

3. Montrer que T admet un élément neutre dans I

4. Trouver le symétrique, s'il existe, de $x \in I$ pour la loi T

Sujet 3 :

On considère dans $IR - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ la loi * définie par : $x * y = x + y - 2xy$.

1- Montrer que * est bien une loi de composition interne dans $IR - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ commutative et associative

2- Déterminer l'élément neutre de * dans $IR - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

3- Soit $x \in IR - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Montrer que x admet un symétrique x' dans $IR - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, à déterminer

4- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}. \quad \underbrace{x * x * x * \ldots\ldots\ldots\ldots * x}_{n\,fois} = \frac{1}{2}\left[1 - (1-2x)^n\right]$

5- Résoudre dans $IR - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ l'équation : $x^{[n]} = \underbrace{x * x * x * \ldots\ldots\ldots\ldots * x}_{n\,fois} = 0$

Sujet 4:

Soit dans IR^2 la loi de composition interne définie par : $(x, y) * (a, b) = (x + a + ax, y + b)$

1. Vérifier que * est commutative, associative et admet un élément neutre dans IR^2

2. Déterminer les éléments de IR^2 admettant un symétrique par *

3. Soit l'ensemble : $G = \{(x, y) \in IR^2, x \neq -1\}$.

   Montrer que G est une partie stable de IR^2 et dont tout élément admet un symétrique

4. Soit : $H = \{(x, \ln(x+1)) \;\; ; \;\; x > -1\}$.

   a) Montrer que H est une partie stable par * de IR^2

   b) Montrer que tout élément de H admet un symétrique par * dans H

Sujet 5:

Soit dans IR^2 la loi de composition interne définie par : $(a,b)*(x,y)=(ax-by,bx+ay)$

1. Vérifier que * est commutative et associative dans IR^2
2. Montrer que * admet un élément neutre dans IR^2 et le déterminer
3. Montrer que tout élément non nul de IR^2 est symétrisable par * et déterminer son symétrique
4. On pose $(\alpha x,\alpha y)=\alpha(x,y)$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et on pose $(1,0)=1$ et $(0,1)=i$
   a) Calculer $(0,1)^2=(0,1)*(0,1)$.
   b) Ecrire tout élément (x,y) de IR^2 en fonction de 1 et i

Sujet 6 :

Soit E un ensemble non vide. Pour toute partie A de E, on définie l'application indicatrice de A par $\varphi_A(x)=1$ si

$x\in A$ et $\varphi_A(x)=0$ sinon.

1. a) Montrer que pour tout deux partie A et B de E : $A=B$ si et seulement si $\varphi_A=\varphi_B$
   b) Vérifier que $\varphi_{A\cap B}=\varphi_A\times\varphi_B$ et déduire que $(\varphi_A)^2=\varphi_A$
   c) Montrer que $\varphi_{A\Delta B}=(\varphi_A-\varphi_B)^2$
2. Déterminer les propriétés de la LCI Δ dans $P(E)$
3. a) Déterminer les propriétés de la LCI « intersection » dans $P(E)$
   b) Montrer que dans $P(E)$ la loi « intersection » est distributive par rapport à Δ

Sujet 7:

1- Soient les matrices : $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculer $(A+B)C$ et $AC+BC$

b) On pose $M=\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $AM=B$ et $MA=B$

c) Résoudre l'équation $AM=I$ avec $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ la matrice unité de $M_2(IR)$

Déduire que M est inversible et calculer son inverse

2- On considère les matrices : $E=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ et $F=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ et $G=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

a) Calculer EF . Déduire que E et F sont des diviseurs de zéro

b) Calculer F^2 . F est-elle inversible ?

b) Calculer G^2 et déduire G^3 et G^4

Sujet 8:

On considère les matrices : $K=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&3&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

1- Calculer $K-JI$ et KJ et JK et J^2

2- Calculer $(I-J)(I+J)$ et comparer avec I^2-J^2

3- Montrer que K inversible et est déterminer son inverse

4- Résoudre l'équation $KM=J$ dans $M_3(IR)$

Sujet 9:

Le produit par $\alpha \in IR$ d'une matrice est la matrice dont tous les coefficients sont multipliés par α

- Soient $A=\begin{pmatrix}2&5\\-\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$. Calculer $-2A+4B$
- Montrer que $\begin{pmatrix}x&y&z\\y&x&y\\z&y&x\end{pmatrix}=xE+yF+zG$ avec E et F et G des éléments fixes de $M_3(IR)$

Sujet 10:

Soit $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ et $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

1. a) Montrer que $(A-I)^2=O$. Déduire que $A-I$ est un diviseur de zéro

   b) Déduire que A est inversible puis déterminer son inverse A^{-1}

2. On note $A^0=I$ et $A^{n+1}=A^n\times A$. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \in A^n=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}$

3. a) Ecrire A en fonction de I et J

   b) Retrouver le résultat précédent par la formule du binôme de newton

4. a) Construire, par récurrence, les suites (u_n) et (v_n) telles que : $\forall n \in \in A^n=u_n I+v_n A$

   b) Montrer que la suite (u_n) est arithmétique et déduire u_n et v_n en fonction de n

   c) Calculer A^n et retrouver le résultat précédent

Sujet 11:

Soient $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $K=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

1. Vérifier que $B=I+K$ et que $K^3=0$

2. Déduire que $I-k$ est inversible dans $M_3(IR)$ et calculer son inverse

3. Calculer B^n (S'inspirer des méthodes de l'exercice 4)

Sujet 12 :

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3

1- Montrer que $A^2=2A+I$. Déduire que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}

2- Calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}$ (S'inspirer des méthodes de l'exercice 4)

Sujet 13 :

On considère le sous ensemble E de l'ensemble $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

On muni E de la somme + et de la multiplication x des matrices.

On définit le produit d'un nombre réel par une matrice par : $\alpha\times\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$

1. Vérifier que + et x sont bien deux LCI commutatives de E (E stable par ces deux lois)
2. Montrer que + et x sont associatives dans E et y admettent des éléments neutres à préciser
3. Montrer que tout élément non nul de E est symétrisable dans E par ses deux lois et préciser le symétrique dans chaque cas
4. On pose $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   a) Montrer que $J^2=-I$
   b) Ecrire tout élément de E en fonction de I et de J

———— . . . . ————

Sujet 14 :

Soit U l'ensemble des nombres complexes de module 1 : $U=\{z\in\mathbb{C}\,;\quad |z|=1\}$

1. a) Montrer que U est stable par la multiplication dans $\mathbb{C}$ (Stabilité par composition)
   b) Montrer que l'inverse de tout élément de U appartient à U (Stabilité par symétrisation)
2. Soit : $f:(IR,+)\to(U,\times)$ avec $f(x)=e^{ix}$
3. Montrer que f est un morphisme surjectif de $(IR,+)$ dans $(U,\times)$
4. Soit $\aleph$ l'ensemble des racines n[ieme] de 1 : $\aleph=\{z\in\mathbb{C}\,;\quad z^n=1\}$
   a) Montrer que $\aleph$ est une partie stable de $(U,\times)$, par composition et par symétrisation
   b) Montrer que: $g:(\mathbb{Z},+)\to(\aleph,\times)$ avec $g(k)=e^{i\frac{(2k\pi)}{n}}$ est un morphisme
   c) Montrer que: $g:(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)\to(\aleph,\times)$ avec $g(\bar{k})=e^{i\frac{(2k\pi)}{n}}$ est un isomorphisme

Sujet 15 :

L'ensemble H des homothéties du plan de centre Ω est muni de la loi o (Composition des applications)

1. a) Vérifier que o est bien une LCI dans H

   b) Ecrire l'expression complexe générale d'un élément de H

2. Montrer que: $F:(\mathbb{R}^{*},\times)\to(\mathrm{H},o)$ avec $g(x)=h_{(\Omega,x)}$ est un isomorphisme

3. a) Déterminer l'élément neutre de o dans H

   b) Déterminer le symétrique de chaque élément de H pour la loi o

4. Résoudre dans H les équations :

   a) $h_{(\Omega,x)}o\ h_{(\Omega,3)}=\ h_{(\Omega,2)}$

   b) $h_{(\Omega,x)}o\ h_{(\Omega,x)}o\ h_{(\Omega,x)}=h_{(\Omega,2)}$

   c) $h_{(\Omega,x)}o\ h_{(\Omega,x)}o\ h_{(\Omega,x)}o........o=h_{(\Omega,-3)}$ (composé n fois)