Les limites

Br-Rachid *www.sc-math.e-monsite.com*

Sujet 1 :

Soit $f(x)=\sqrt{x^2(x+1)}+\sqrt{x^2(x-1)}$

Déterminer le domaine de définition de f. Peut-on calculer la limite de f en 0 ?

Sujet 2 :

1. Soit $f(x)=\dfrac{x\sin(x)}{1+x^2}$. Vérifier que f est bien définie sur un intervalle de centre 0 et montrer en utilisant la définition que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$
2. Soit $g(x)=(x^2+x)\cos(x)$. Vérifier que g est bien définie sur un intervalle de centre 0 et montrer en utilisant la définition que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$

Sujet 3 :

1. Soit $f(x)=2x^2-3x+1$. Montrer en utilisant la définition que $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=6$
2. Soit $g(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$. Montrer en utilisant la définition que $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=\dfrac{9}{2}$

Sujet 4 :

1. Soit $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. Montrer en utilisant la définition que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$
2. Soit $g(x)=\dfrac{-x^2+1}{x-1}$. Montrer en utilisant la définition que $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$
3. Soit $h(x)=\sqrt{x^2-2}$. Montrer en utilisant la définition que $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=+\infty$

Sujet 5 :

1. Soit $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$. Majorer convenablement $f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$
2. Soit $g(x)=\dfrac{sinx}{x-1}$. Encadrer convenablement $g(x)$ puis calculer $\lim\limits_{|x|\to +\infty} g(x)$

Sujet 6 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to +\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right) \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+3}$$

$$\lim_{|x|\to +\infty} x\sin x+2x \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x-1}$$

Sujet 7 :

Soit $f(x)=\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x+1}}$

1. Déterminer le domaine D_f et montrer que : $\forall x\in D_f.$ $f(x)=\dfrac{x-1}{x}(1+\sqrt{x+1})$
2. a) Montrer que : $\forall x\in D_f.$ $(0<x \Rightarrow 1-\sqrt{x+1} < 0)$ *et* $(-1<x<0 \Rightarrow 1-\sqrt{x+1} > 0)$
   b) Calculer les limites de f en 0 à droite et à gauche
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$
4. a) Montrer que : $\forall x\in D_f.$ $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\dfrac{-1}{1-\sqrt{x+1}}\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}\right)$
   b) Déduire $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$
5. Montrer que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\sqrt{2}+1$

Sujet 8 :

Soit la fonction définie par :

$f(x)=x|x|$ *si* $x>-1$ *et* $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x-1$ *si* $x\leq-1$

1. Déterminer D_f
2. Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue
3. Calculer les limites de f aux bornes de D_f
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x=-1$ et vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x+1=0$
5. Calculer $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

Sujet 9 :

Soit $f(x)=x-1-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

1. Déterminer D_f
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

Sujet 10: Discuter et calculer suivant le paramètre réel m les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{1+x^2}-mx)$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5mx^2+(1-2m)x+1}{x-1}$

Sujet 11 :

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi\sqrt{x+1})}{x}$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{(2-x)^n-1}$ $(n\in IN^*)$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-sinx)(1-\sin^2 x).....(1-\sin^n(x))}{\cos^{2n}x}$ (indication : Poser $t=\sin(x)$)
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{3n-2}\sqrt{x}-1}{1-x^{2n}}$ $(n\in IN^*)$
5. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)\cos(2x)}{x^2}$ puis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)\cos(2x)\cos(3x)}{x^2}$

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)\cos(2x)\ldots\cos(nx)}{x^2}$ pour $n>3$

Sujet 12 :

1. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} tg(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tg(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+} tg(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^-} tg(x)$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 1}(2-3x+x^2)tg(\dfrac{\pi}{2}x)$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\dfrac{tg^2(x)-tg(x)+\sqrt{2}}{-2tg^3(x)+3tg(x)-7}$

Sujet 13 : Soit $g(x)=\dfrac{(1-tgx)^2}{\cos 2x}$

1. Déterminer le domaine de définition de g
2. Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} g(x)$
3. Montrer que g est périodique et en donner une période
4. Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{-15\pi}{4}} g(x)$

Sujet 14: Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ sachant que f est paire

2- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ sachant que f est impaire