Eléments de logique

Br-Rachid www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 1 :

1. La proposition suivante est-elle vraie ? P : « Il existe un nombre réel x qui vérifie $x^2+x+1\leq 0$ »
2. La proposition suivante est-elle fausse ? R : « Pour tout nombre réel positif x tel que $x\neq 1$ on a : $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}>0$»
3. Quelle est la valeur de vérité de la proposition Q : « Quelque soient x et y deux réels $x^2+xy+y^2\geq 0$ »

Sujet 2 :

On considère l'équation : $x^2+x+c=0$ avec $c\in\left]-\infty,\frac{-1}{4}\right[$

1. L'équation admet deux solutions distinctes. Vrais ou Faux ?
2. Les solutions de l'équation sont de même signe. Vrais ou Faux

Sujet 3 ;

Soit la fonction : $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$. Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1. P : « $\sqrt{2}$ n'appartient pas au domaine de définition de f »
2. Q : « Pour tout x de domaine de définition de f, on a $f(x)=\frac{7}{x-3}+2$ »
3. R : « La fonction f est croissante »

Sujet 4 :

I. Ecrire, à l'aide de quantificateurs appropriés, les propositions suivantes et dire s'elles sont vraies ou fausses

1. Pour tout nombre réel, il existe un entier relatif qui lui est inférieur
2. Il existe un entier naturel plus grand que tous les nombres rationnels
3. L'expression $\frac{x^2\sin(x)}{x^2+1}$ est bornée quelque soit le nombre réel x

II. Ecrire sans quantificateurs les propositions suivantes et dire s'elles sont vraies

1. P : « $\exists!\, x\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].\quad 2\sin(x)-1=0$ »
2. Q : « $\forall m\in\mathbb{N}.\ \exists x\in IR.\quad x^2-mx-1=0$ »

Sujet 5 :

I. Donner la négation des propositions suivantes :

1. P : « Tous les êtres vivants sont des mortels »
2. Q : « La fonction donnée par $f(x)=x^2+1$ est croissante sur IR »
3. R : « Il existe un entier relatif qui n'est pas multiple de 3 »

II. Nier les propositions suivantes :

a. P : « $\forall x\in\mathbb{Z}.\quad \frac{x+1}{x^2+1}\in\mathbb{Q}$ »

b. Q : « $\exists y\in]1,+\infty[.\quad y^2\neq 1$»

c. R : « $\forall M\in IR^+.\ \exists x\in IR.\quad 2\sqrt{M}-x=0$ »

2- Quantifier la proposition suivante: "Il n'existe aucun nombre réel supérieur à tous les nombres relatifs »

Eléments de logique

Br-Rachid www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 6:

1- Nier la proposition : $\forall x \in IR. \quad -3 < x \leq 4$

2- Ecrire en indiquant séparément les conditions sur x et y la proposition : $(x, y) \neq (0,0)$

3- Ecrire en indiquant les conditions sur x la proposition : $|x| \neq 5$

4- Nier la proposition : $\exists x \in \mathbb{R}.\ \exists y \in \mathbb{R}. \quad \begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ x + 5y = 1 \end{cases}$

5- Nier la proposition : $\exists ! x \in E. \quad 2x + 1 = 0$

Sujet 7:

1- a) Ecrire sous forme d'un intervalle l'ensemble des nombres réels tels que : $\begin{cases} -2x - 6 \geqslant 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases}$

b) Déduire le domaine de définition de la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{-2x-6}}{x+3}$

2- Résoudre le système à variables réelles : $\begin{cases} x - y = 1 \\ (2x + y)(x + y) = 0 \end{cases}$

3- Résoudre le système à variables réelles : $\begin{cases} (2x - y - 1)(x - y - 1) = 0 \\ (x + y - 1)(2x + y - 1) = 0 \end{cases}$

4- a) Résoudre le système à variables réelles : $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

b) Déduire les solutions du système : $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ 3|x| - |y| = 0 \end{cases}$

Sujet 8 :

1- Soit $x \in [0, 2\pi]$. Montrer que si $2\sin(x) - 1 = 0$ alors $\left(x = \dfrac{\pi}{6} \quad ou \quad x = \dfrac{5\pi}{6}\right)$

2- Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que : $\left(x^2 + \dfrac{5}{2}x + 1 = 0\right) \Rightarrow (x = -2)$

3- Soit $x \in IR^*$. Montrer que : $\left(|x| + \dfrac{1}{|x|}\right) \geq 2$

4- Soit $(x, y) \in IR^2$. Montrer que : $\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2\right) \Rightarrow (x = 0 \quad et \quad y = 0)$

5- a) Montrer la proposition P : $\forall a \in \mathbb{R}^+.\ \forall b \in \mathbb{R}^+. \quad (a < b \Rightarrow \sqrt{a} + a < \sqrt{b} + b)$

b) Ecrire la négation de P

6- Montrer que pour tous nombres réels a , b , x et y : $ax + by = 1 \Rightarrow (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq 1$

Sujet 9:

Soient P et Q deux propositions. Montrer que :

1. $[P \Rightarrow (Q\, et\, \overline{Q})] \Leftrightarrow \overline{P}$ est une loi logiques
2. $\overline{[(P et Q)\, ou\, (\overline{P}\, et\, Q)]} \Leftrightarrow \overline{Q}$ n'est pas une loi logique

Sujet 10:

1. Soit n un entier naturel.
   a) Montrer par une implication directe que : (n est pair) $\Rightarrow$ (n^2 est pair)
   b) Montrer, par contraposition, que : (n^2 est pair) $\Rightarrow$ (n est pair)
2. Soit n un entier naturel. Montrer par contraposition que : (8 ne divise pas $n^2 - 1$) $\Rightarrow$ (n est pair)
3. Soit $x \in IR^{+*}$. Montrer que : $(x \neq 0) \Rightarrow \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \neq 1 - \sqrt{x}$

4. Soit x et y deux nombres réels avec $xy \neq 1$. Montrer par contraposition que : $x \neq y \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \neq \frac{y}{1+y^2}$

Sujet 11:

1- Montrer par disjonction des cas, que : $\forall n \in \mathbb{N}. \quad \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$

2- Montrer par disjonction des cas, que : $\forall n \in \mathbb{N}. \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \in \mathbb{N}$

Sujet 12:

1- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $(\exists k \in \mathbb{N}. \quad n = 3k) \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{N}. \quad n^2 = 3m)$

2- On rappel que tout nombre rationnel s'écrit $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et $pgdc(a,b) = 1$

On rappel aussi que la somme, le produit et la division de deux rationnels est un nombre rationnel.

Montrer, par l'absurde, que :

a) Montrer que $\sqrt{2} \notin Q$ b) Montrer que $\sqrt{3} \notin Q$ c) Montrer que

Sujet 13:

Soient x et y et z trois nombres réels strictement positifs tels que : $xyz > 1$ et $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

1- Montrer par l'absurde, que $x \neq 1$ et $y \neq 1$ et $z \neq 1$

2- Montrer par l'absurde, que $x < 1$ ou $y < 1$ ou $z < 1$

Sujet 14:

Soient a et b deux nombres rationnels.

1- Montrer que : $(a + b\sqrt{2} = 0) \Rightarrow (a = 0 \, et \, b = 0)$

2- Déduire une condition suffisante sur a et b pour avoir $a + b\sqrt{2} \neq 0$

Sujet 15:

Soit n un entier naturel.

1- Encadrer $n^2 + 3n + 2$ par les carrées de deux entiers naturels successifs

2- Déduire, par l'absurde, que $\sqrt{n^2 + 3n + 2} \notin \mathbb{N}$

Sujet 16:

Soient $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ avec $\forall x \in IR. \exists y \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; \ k \in \mathbb{Z}\}. \quad (A+B)\sin x + (A-B)\cos y = 0$

1. Vérifier que si $A = 0$ et $B = 0$ alors $(A+B)\sin x + (A-B)\cos y = 0$

2. a) Montrer que : $\exists y_0 \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; \ k \in \mathbb{Z}\}. \quad (A-B)\cos(y_0) = 0$ et déduire que $A = B$

   b) Montrer que $A = 0$ et $B = 0$

Sujet 17:

Soit $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$

1- Déterminer l'intersection de la courbe de f et les axes de coordonnées

2- Montrer que f est une fonction strictement décroissante

3- Montrer l'équivalence : $\forall x \in \mathbb{R}^+ . \forall y \in \mathbb{R}^+ . \quad \sqrt{1+x}-\sqrt{x}<\sqrt{1+y}-\sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad y<x$

Raisonnement par recurrence – Complements mathématiques

Sujet 18:

Soit : $f(n)=3^{2n}-2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer $f(1)$ et $f(2)$ et vérifier que $f(1)$ et $f(2)$ sont divisibles par 7
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* . \quad f(n+1)=2f(n) + 7\times 3^{2n}$
3. Montrer, par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}.$ 7 divise $f(n)$

Sujet 19:

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}. \quad 2^n \geqslant n+1$
2. Montrer par récurrence que : $\forall a \in]-1,+\infty[. \ \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$

Sujet 20:

1. On rappel que $\forall n \in \mathbb{N}^* . \quad S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Déduire, en fonction de n, les sommes :

   a) $P_n=2+4+6.........+2n$ (Notation : $P_n=\sum_{k=1}^{k=n} 2k$)

   b) $I_n=1+3+5.........+(2n+1)$ (Notation : $I_n=\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)$)
2. Calculer le produits suivant en fonction de n : $Z_n=5\times 5^2\times 5^3\times\ldots\times 5^n$ (Notation : $Z_n=\prod_{k=1}^{k=n} 5^k$)

Sujet 21:

On pose $\nabla_n=1+2^2+3^2+...........+n^2$ (Notation : $\nabla_n=\sum_{k=1}^{k=n} k^2$)

1. Calculer ∇_1 et ∇_2
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* . \quad \nabla_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. Calculer $1+2^2+3^2+...........+81^2$
4. Calculer le produit suivant en fonction de n : $Q_n=3\times 3^{2^2}\times 3^{3^2}\times\ldots\times 3^{n^2}$ (Notation : $Q_n=\sum_{k=1}^{k=n} 3^{k^2}$)

Sujet 22:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La factorielle de n est l'entier naturel définit par : $n!=1\times 2\times 3\times ....\times n$

On admet que $0!=1$

1. a) Calculer $1!$ et $3!$ et $4!$ puis calculer l'entier naturel $\dfrac{11!}{8!}$

   b) Ecrire sous forme d'une factorielle et en fonction de n: $(n+1)\times n!$

   c) Simplifier et écrire en fonction de n : $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$
2. On considère la proposition $P(n)$: $n!\geq 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

a) Quelle est la valeur de vérité de $P(0)$ et de $P(1)$ et de $P(2)$ et de $P(3)$ et de $P(4)$

b) Montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 4$

Sujet 23:

Soit $n \in IN^*$. On pose : $u_n = 1\times 1! + 2\times 2! + \ldots\ldots\ldots\ldots + n\times n!$

a) Calculer u_1 et u_3

b) Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in IN^*. \quad u_n = (n+1)! - 1$

Sujet 24:

Soit $n \in IN^*$. Pour $x \in IR - \{1\}$, on pose : $Q_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$

1. Calculer Q_2 et Q_3 Lorsque $x = 5$
2. Faire la division euclidienne de $x^3 - 1$ par $x - 1$ et déduire Q_2 en fonction de x
3. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in IN^*. \ \forall x \in IR - \{1\}. \quad 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$
4. Applications : Calculer les sommes : $A = 1 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{17}$ et $B = 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 4 + \ldots + \sqrt{2}^{21}$
5. Calculer en fonction de n les sommes suivantes: $\sum_{k=0}^{k=n-1} 3^k$ et $\sum_{k=1}^{k=n} 3^k$
6. a) On pose $x = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Déduire de la question 3- l'identité remarquable :

   $\forall n \in IN^*. \quad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$

   b) Développer $a^5 - b^5$

Sujet 25:

A- Soit $n \in IN^*$. On pose : $w_n = \left(\dfrac{1}{1}\times\dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(\dfrac{1}{(n)}\times\dfrac{1}{(n+1)}\right)$

1. Calculer w_2 et w_3
2. Montrer, par récurrence, que : $w_n = \dfrac{n}{n+1}$

B- Une autre approche :

1- a) Déterminer les nombres réels a et b tels que : $\dfrac{1}{(k-1)}\times\dfrac{1}{k} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k}$

b) Déduire le résultat de la question 2- : $w_n = \dfrac{n}{n+1}$

C- Soit $n \in IN^{¿}$. On pose : $k_n = \left(\dfrac{1}{1\times 2\times 3}\right) + \left(\dfrac{1}{2\times 3\times 4}\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*. \quad k_n = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$