Chapitre : Nombres Complexes – Ensemble IC

Br-Rachid http://www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 1:

1. Donner la forme algébrique $z=(2-3i)+(2-i)(3i+5)$ et représenter son image dans le plan complexe
2. a) Donner la forme algébrique de $i^n \quad (n\in\mathbb{N})$ suivant les valeurs de l'entier naturel n
   b) Représenter dans le plan complexe le point d'affixe i^n
3. Ecrire sous forme algébrique $(1+i)^2$ et $(1-i)^2$ et déduire celle de $(1+i)^8$ et $(1-i)^{16}$
4. Calculer la somme $1+i+i^2+\dots\dots\dots+i^n$ et déduire $1+i+i^2+\dots\dots\dots+i^{71}$

Sujet 2 :

1. a) Factoriser dans l'ensemble des nombres complexes : u^2-v^2 et u^2+v^2
   b) Déduire les solutions dans IC de l'équation $z^2=-5$
2. On pose : $j=\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   a) Développer $(a+bj)(a+b\bar{j})$ avec $\bar{j}=\dfrac{-1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   b) Déduire la factorisation dans IC de : a^3-b^3 et a^3+b^3

Sujet 3 :

Soit $z=x+iy$ un nombre complexe. On pose : $f(z)=z^2+z+1$

1. Calculer $f(i)$ et $f(-1+i)$ et $f\left(\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. a) Déterminer en fonction de x et de y les parties réelles et imaginaires de $f(z)$
   b) Résoudre $f(z)=0$
3. a) Ecrire la forme canonique de $f(z)$
   b) Déduire, d'une autre méthode, les solutions de l'équation $f(z)=0$

Sujet 4 :

Soit $z=x+iy$ un nombre complexe. On pose $f(z)=z^2+(2+2i)z+2i$

1- Calculer $f(-1-i)$

2- Montrer que : $\forall y\in IR. \quad f(-1+iy)\in IR$ et que : $\forall x\in IR. \quad f(x-i)\in IR$

3- Déterminer $R_e(f(z))$ et $\Im(f(z))$ en fonction de x et y avec $z=x+iy$

4- Soit $E=\{M_z\in P. \quad f(z)\in IR\}$. Donner une équation cartésienne de E et déterminer la nature géométrique de E

5- Soit $F=\{M_z\in P. \quad f(z)\in iIR\}$. Déterminer la nature géométrique de E. Donner une équation cartésienne de E et déterminer la nature géométrique de E

6- Déterminer $E\cap F$

Sujet 5:

Soit F la transformation du plan complexe qui transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe z' tel que : $z' - 2z = z + 1 - i$

1. a) Déterminer l'image par F du point A_{1+i}

   b) Montrer que F est une homothétie et préciser l'affixe de son centre Ω et son rapport k

2. Soit G l'homothétie de centre H_{2i} et de rapport $k = -2$. Donner l'expression complexe de G

   Former l'expression complexe de GoH. Déduire sa nature et ses éléments caractéristiques

3. t est la translation dont l'affixe de son vecteur directeur est 3-4i

   a) Donner l'expression complexe de t

   b) Donner les expressions complexes de toH et toH et préciser leurs éléments caractéristiques

Sujet 6:

Soit $u = 2 + 3i$ un nombre complexe. Soit A le point d'affixe a

On considère (D) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z = ku$ lorsque k décrit IR

4. a) Montrer que $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA}$

   b) Déterminer et représenter l'ensemble des points (D)

   c) Déterminer et représenter l'ensemble des points M_z tels que $z = ku$ lorsque k décrit $[-1,2]$

5. On considère (L) l'ensemble des points M_z tels que $z = 1 - 2i + ku$ lorsque k décrit IR

   a) Montrer que $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BA}$ avec B le point d'affixe $1-2i$

   b) Déterminer et représenter l'ensemble des points (D)

6. Donner la représentation complexe de la droite (K) passant par le point B_{1+2i} et de direction $v = 1 - i$

Sujet 7 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 2 = 0$

2. On pose : $P(z) = z^3 - (1+3i)z^2 + (2+3i)z - 6i$

   a) Montrer que P admet une racine imaginaire pur yi à déterminer

   b) Calculer les réels a et b et c telles que $z^3 - (1+3i)z^2 + (2+3i)z - 6i = (z-3i)(az^2 + bz + c)$

   c) Déduire alors les solutions dans $\mathbb{C}$, puis dans IR de l'équation $P(z) = 0$

3. Sachant que 2 est solution réelle, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 3z^2 + 4z - 4 = 0$

Sujet 8:

1. En utilisant les identités remarquables dans C, résoudre l'équation $z^8 - 1 = 0$

2. On pose : $P(x) = \dfrac{1}{2i}\left(\left(1 - i\dfrac{x}{8}\right)^8 - \left(1 + i\dfrac{x}{8}\right)^8\right)$ avec $x \in IR$

   a) Calculer $P(0)$ et $P(8)$ et $P(-8)$

   b) Résoudre dans IR l'équation $P(x) = 0$ (Utiliser question 1)

   c) Utiliser le binôme de Newton et déterminer les parties réelle et imaginaire de $P(x)$

Sujet 9:

On considère l'équation dans l'ensemble des nombres complexes $\bar{z}=(2-3i)z \qquad (E)$

1. Montrer que : $z=(2+3i)\bar{z}$
2. On pose $z=x+iy$. Montrer que $x^2+y^2+6xy=0$
3. Résoudre (E)

Sujet 10:

Soit $f(z)=\frac{z-1}{z-i}$. Pour tout z différent de i. On pose $z=x+iy$

1. a) Calculer $f(2-i)$. Déduire que les points A_1 et B_i et C_{2-i} sont alignés
   b) Déterminer l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme
2. a) Montrer que : $\forall z\neq i. \qquad f(z)\neq 1$
   b) Montrer que f est bijective de $C-\{i\}$ vers $C-\{1\}$ et déterminer sa réciproque
3. Déterminer l'ensemble des points M_z pour que $f(z)$ soit réel, imaginaire pur ? $f(z)f(\bar{z})=1$?

Sujet 11:

Soit $f(z)=\frac{z}{1+cos\theta}+\frac{2}{z}$ avec $z\in\mathbb{C}^*$ et $-\pi<\theta<\pi$

1. Donner la forme algébrique de $f(1-i)$ puis calculer θ pour que $f(1-i)$ soit réel
2. a) Montrer que : $\overline{f(z)}=f(z) \quad\Leftrightarrow\quad (z=\bar{z} \quad ou \quad z\times\bar{z}=4\cos^2\frac{\vartheta}{2})$
   b) Montrer que : $f(z)\in iIR \quad\Leftrightarrow\quad z\in iIR$
3. Déterminer le lieu géométrique des points M_z pour que $f(z)$ soit réel, imaginaire pur ?

Sujet 12:

1. Soit $P(z)=\sum_{k=0}^{k=n} a_k z^k$ avec $z\in\mathbb{C}$ et $a_k\in IR$ pour tous $0\leq k\leq n$
   a) Montrer que : $P(z)=0 \quad\Leftrightarrow\quad P(\bar{z})=0$
   b) Montrer que si $n\equiv 1[2]$ alors $(\exists x\in IR. \qquad P(x)=0)$
2. Soit $Q(z)=5z^3-2z^2-2z+5$. Soit S l'ensemble des solutions de $Q(z)=0$ dans $\mathbb{C}$
   a) Calculer $Q(-1)$
   b) Montrer que si u est racine de Q alors $u\neq 0$ et $\frac{1}{u}$ est racine de Q. Résoudre alors $Q(z)=0$
3. Soit $R(z)=2z^4-5z^3+4z^2-5z+2$
   a) Calculer $R(2)$ et $R(i)$
   b) Montrer que si v est racine de R alors $v\neq 0$ et $\frac{1}{v}$ l'est aussi. Résoudre alors $R(z)=0$

Sujet 13:

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que $|z-2-i|=1$
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que $|z-2-i|=|z+i|$
3. Montrer que le triangle ABC tel que $z_A=3+i$ et $z_B=i$ et $z_C=\frac{3}{2}+7i$ est isocèle

Sujet 14:

1- Soit z un nombre complexes différent de $-i$. Montrer que : $\Im(z)>0 \Longleftrightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right|<1$

2- Soient trois nombres complexes tels que : $|a|=1$ et $|b|=1$ et $|c|=1$

Montrer que : $\left|\frac{a-b}{1-a\bar{b}}\right|=1$ et que : $|ab+bc+ac|=|a+b+c|$

3- Déterminer les nombres complexes v pour lesquels v et $(1-v)$ et $1/v$ ont le même module

4- Soit $s\neq 1$ un nombre complexe. Montrer que : $|s|=1 \Leftrightarrow \frac{1+s}{1-s}\in iIR$

Sujet 15:

Soit $f(z)=\frac{iz+2}{z-i}$ définie sur $D=\mathbb{C}-\{i\}$

1. a) Déterminer les nombres complexes fixes par f et résoudre dans D les équations $f(z)=iz$ et

   b) Montrer que $f(z)\neq i$ pour tout nombre complexe z

   c) Montrer que f est bijective de D vers D et déterminer sa réciproque

2. a) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe M_z pour que $f(z)$ soit réel

   b) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe M_z pour que $f(z)$ soit imaginaire pur

   c) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe M_z pour que $|f(z)|=1$

3. Soient H_i et r un nombre réel strictement positif

   a) Montrer que : $\forall z\in D.\quad |z-i|=r \quad\Leftrightarrow\quad |f(z)-i|=\frac{1}{r}$

   b) F est l'application qui associe M_z au point $M_{f(z)}$. Déterminer l'image par F du cercle $C_{(H,r)}$

Sujet 16:

1. Soit l'équation $(E): z^2=1+i$.

   a) On pose $z=x+iy$. Montrer alors que : $(S)\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ xy=\frac{1}{2} \\ x^2+y^2=\sqrt{2}\end{cases}$ puis résoudre le système (S) dans IR^2

   b) En déduire les racines carrées de $1+i$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2-z-\frac{1}{4}i=0$ et $z^2-2iz+i=0$ et $iz^2-(1-i)z-3i=0$

3. Déterminer deux nombres complexes de somme $1-3i$ et de produit $2+5i$

Sujet 17:

Soit $u=\frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{\sqrt{2}(1-\sqrt{3}i)^5}$ et $w=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$

1. Ecrire w sous ses formes algébrique et géométrique, et déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
2. Calculer le module de u
3. Montrer que $arg(u)\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$ et déduire la forme trigonométrique de u
4. Ecrire u sous forme algébrique

Sujet 18:

Soit $v=\cos(x)+i\sin(x)$

1. Développer v^3
2. Déduire les transformations de $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, et de $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$
3. Soit z un nombre complexe de module 1. Montrer que $(z+\bar{z})^2-(z-\bar{z})^2=4$. Quel théorème reconnaissez-vous par ce résultat ?

Sujet 19:

Soit $z_n=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

1. a) Montrer que z_n est imaginaire pur
   b) Calculer le module et l'argument principal de $\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$ puis déduire ceux de $\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$
   c) Déduire que $z_n=\frac{i}{2^{n-1}}\sin\frac{n\pi}{3}$ et calculer la limite de la suite $(|z_n|)$
2. Par la formule de Newton, Former la partie imaginaire de $\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n$ et conclure

Sujet 20:

1- Déterminer l'argument principal de $\sqrt{3}+i$. Déduire la forme trigonométrique de $\sqrt{3}+i$

2- Déterminer les parties réelles et imaginaires de $(\sqrt{3}+i)^n$ $(n\in\mathbb{N})$

3- Déterminer l'ensemble $E=\{n\in\mathbb{N}. \quad (\sqrt{3}+i)^n\in IR\}$

Sujet 21:

1. Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^5=1$ (E)
2. a) Vérifier que : $z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$
   b) Calculer s et r tels que : $z^4+z^3+z^2+z+1=(z^2+sz+1)(z^2+rz+1)$
   c) Résoudre les équations $z^2+sz+1=0$ et $z^2+rz+1=0$
   d) Déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

Sujet 22:

Soient A et B et C les points d'affixes respectifs $a=1+i$ et $b=1$ et $c=2+i$.

a) Calculer sous formes algébrique et trigonométrique $\frac{c-a}{b-a}$

b) Déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

c) Quel est la nature du triangle ABC ?

Sujet 23:

Soients $a=1-i$ et $b=1+3i$ et $c=3+i$ et $d=-1+i$

a) Calculer sous forme algébrique $\frac{b-c}{a-c}\div\frac{b-d}{a-d}$

b) Montrer que les points A et B et C et D d'affixes respectifs a et b et c et d sont cocycliques

d) Déterminer le rayon et l'affixe du centre du cercle circonscrit au points A et B et C et D

e) Montrer que $[AB)$ est bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)$

Sujet 24:

1- a) Montrer que $u=3+4i$ est solution de l'équation $z^2-5(2+i)z+17+31i=0$

b) Déterminer v l'autre solution de cette équation

2- Donner les formes algébriques et trigonométrique de $\frac{u}{v}$

3- a) Ecrire u sous forme d'un carré puis déterminer les arguments principaux de $2+i$ et $7+i$

b) Déduire que $2\,Arctg\frac{1}{2}-Arctg\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$

Sujet 25:

1. Calculer $(1-3i\sqrt{3})^2$ puis dans résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-(9+i\sqrt{3})z+26+6i\sqrt{3}$
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   Soit A le point d'affixe $a=5-i\sqrt{3}$. Le point B est tel que OAB est équilatéral et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

   a) Montrer que l'affixe de B est $b=4+2i\sqrt{3}$

   b) Déterminer l'affixe u du milieu I de $[OB]$, puis k celui de K avec $ABIK$ est un parallélogramme

   c) Montrer que $\frac{k-a}{k}$ est imaginaire pur et déduire la nature du triangle OAK

   d) Soit C le point d'affixe $c=\frac{2a}{3}$. Montrer que B et C et K sont alignés

Sujet 26:

1. Représenter dans le plan les points A et B et C et D d'affixes $a=1$ et $b=i$ et $c=3+i$ et $d=1+3i$
2. Montrer que (AB) et (CD) sont parallèles
3. Montrer qu'il existe une homothétie h qui envoie A en C et B en D. Préciser le rapport et le centre
4. Montrer qu'il existe une rotation r qui envoie A en C et D en B. Préciser son angle et son centre R
5. Déduire que les points A et B et C et D sont cocycliques et vérifier ce résultat par une autre méthode

Sujet 27:

1. Soit l'équation $(E): (z+i)^n-(z-i)^n=0$.
2. a) Vérifier que i n'est pas solution de (E)
   b) Montrer que $|z+i|=|z-i|$. En déduire que toutes les solutions de (E) sont des nombres réels
   c) Déterminer, sous forme algébrique, et en fonction de n les solutions de (E)
3. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $(E):(z^2+1)^n-(z-i)^{2n}=0$
   a) Vérifier que i est solution de (E) et montrer que toute solution de (E), autre que i, est réel
   b) On suppose désormais que $z\neq i$. Montrer que $\frac{z+i}{z-1}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $0<k\leq(n-1)$
   c) Résoudre l'équation (E) (Ecrire les solutions sous forme algébrique)

Sujet 28:

1. Soient $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ *avec* $0\leq k\leq n-1$ les racines n[ieme] de 1. Calculer $\sum_{k=0}^{k=n-1} z_k$ et $\prod_{k=0}^{k=n-1} z_k$
2. On pose : $u_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\cos(kx)$ et $v_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\sin(kx)$ $(x\neq 2k\pi)$
3. Calculer u_n+iv_n en fonction de x et n. Déduire u_n et v_n en fonction de n et x
4. Soit : $A_n=C_n^0+C_n^1 cosx+\ldots+C_n^n\cos(nx)$ et $B_n=C_n^1 sinx+\ldots+C_n^n\sin(nx)$.
   Calculer A_n et B_n en fonction de n et x

Sujet 29:

1. Déterminer les racines carrées de $Z=\sqrt{3}+i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
   En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$
2. Déterminer les racines cinquièmes de $u=\frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1-i)^3}$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3=0$

Sujet 30:

h et r sont l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$

1. a) Donner les expressions complexes de h et de r
   b) Calculer z' en fonction de z sachant que $N_{z'}$ est l'image de M_z par hoR
2. On pose A_{z_0} avec $z_0=6$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$. $A_{z_{n+1}}=hoR(A_{z_n})$
   a) Calculer z_{n+1} en fonction de n et représenter A_{z_0} et A_{z_1} et A_{z_2} dans le plan complexe
   b) Montrer que $A_{12}\in(Ox)$
   c) Calculer toutes les valeurs de n pour lesquelles $A_{z_n}\in(Ox)$
3. Montrer que le triangle $OA_{z_n}A_{z_{n+1}}$ est rectangle
4. Calculer la longueur de la ligne polygonale $A_{z_0}A_{z_1}A_{z_2}\ldots\ldots A_{z_n}$

Sujet 31:

1. On pose $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que $1+j+j^2=0$ et $-j^2=e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. Soient M et N et L les points d'affixes respectifs 1 et j et j^2. Montrer que MNL est équilatéral
3. Soient a et b et c les affixes des points A et B et C . Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $a+bj+cj^2=0$
4. Montrer que le triangle de sommets M_{z_1} et N_{z_2} et K_{z_3} l est équilatéral si et seulement si $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$

Sujet 32:

1. Soit $(a,b,c,d\,\alpha)\in\mathbb{R}^5$
   a) Représenter les points d'affixes $2e^{i\alpha}$ et $-3e^{i\alpha}$ et $e^{i\alpha}$ et $\frac{-1}{2}e^{i\alpha}$ sachant que $\alpha=\frac{\pi}{4}$
   b) Montrer que les points d'affixes $ae^{i\alpha}$ et $be^{i\alpha}$ et $ce^{i\alpha}$ et $de^{i\alpha}$ sont toujours alignés
2. Soit u un nombre complexe de module 1 . Soient $(z_k)_{1\leq k\leq n}$ ses racines n$^{\text{iemes}}$. Montrer que les points d'affixes $(1+z_k)^n$ sont tous alignés

Sujet 33:

En utilisant les formules d'Euler, montrer les formules de transformation suivantes :

1. $\forall x\in IR.\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$ / $\forall x\in IR.\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$
2. $\forall x\in IR.\forall y\in IR.\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$
3. $\forall x\in IR.\forall y\in IR.\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$

Sujet 34:

Soit $f(x)=\cos^4(x)\sin^4(x)$

1. Linéariser $f(x)$
2. Déterminer la primitive de f qui prend la valeur 1 en 0

Sujet 35:

Dans le plan complexe, soient A_i *et* B_{-i} *et* C_1 *et* D_{-1} quatre points

1. Montrer que les points A *et* B *et* C *et* D sont cocycliques.
2. Montrer qu'il existe un point N de l'axe réel tel que : $\overline{(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})}\equiv\frac{\pi}{4}[\pi]$
3. Soit M avec $\overline{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})}\equiv\frac{\pi}{4}[\pi]$. Montrer que M appartient à un cercle à déterminer

Sujet 36:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe d'origine O. m est un nombre complexe différent de i et de $-i$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2+(1+i)(1+m)z=-im^2-i$
2. Soient $u=m+i$ et $v=1+mi$. Soient A et B et M les points d'affixes respectives u et v et m.

   a) Montrer que $\frac{v}{u}$ est réel si et seulement si le module de m est égale à 1

   b) Déterminer l'ensemble des points M pour que O et A et B soient alignés
3. On suppose que $|m|=1$ et $arg(m)\equiv\theta[2\pi]$ avec $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. Ecrire u et v sous forme exponentielle
4. Montrer que : $\frac{u^2}{m}\in i\,IR^*$ et qu'il existe un unique nombre complexe $\alpha\neq m$ qui vérifie $\frac{u^2-\alpha}{m-\alpha}=i$
5. Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que $R(M)=C$
6. Soient les points Ω et C d'affixes respectifs α et u^2. Montrer que O et C et M et Ω sont cocycliques
7. Déterminer en fonction de m le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit à O et C et M et Ω.

Sujet 37: (Bac 2017 ordinaire)

On considère dans C l'équation (E) : $2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$ avec $m\in\mathbb{C}^*$

1. Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta=-4m^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé directe $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. On suppose que $m\notin\{0,1,i\}$ On pose $z_1=\frac{1+i}{2}(m+1)$ et $z_2=\frac{1-i}{2}(m+i)$. Soient les points A_1 et B_i et M_m et $(M_1)_{z_1}$ et $(M_2)_{z_2}$

   a) Vérifier que $z_1=iz_2+1$

   b) Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre $\Omega_{\frac{1+i}{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (Notation $\omega=\frac{1+i}{2}$)
3. a) Vérifier que $\frac{z_2-m}{z_1-m}=i\frac{m-1}{m-i}$

   b) Montrer que si M et M_1 et M_2 sont alignés, alors M appartient au cercle de diamètre $[AB]$

   c) Déterminer les points M pour que Ω et M et M_1 et M_2 soit cocycliques (Rem : $\frac{z_1-\omega}{z_2-\omega}=i$)

Sujet 38: (Bac-Maroc Ses 2016 Ordinaire)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé directe $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points M_1 et M_2 tels que O et M_1 et M_2 sont distincts deux à deux et non alignés

Soient z_1 et z_2 les affixes respectifs des points M_1 et M_2. Soit M le point d'affixe z tel que $z=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

1. Montrer que : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=-1$. Déduire que M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2
2. Montrer que si $z_2=\overline{z_1}$ alors M appartient à l'axe des réels
3. On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle α avec $\alpha\in]0,\pi[$
   a) Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α.
   b) Montrer que M appartient à la médiatrice de $[M_1M_2]$.
4. Soit $\theta\in]0,\pi[$. On suppose que z_1 et z_2 sont les deux solutions de $6t^2-(e^{i\theta}+1)t+(e^{i\theta}-1)=0$
   Sans calculer z_1 et z_2, vérifier que $z=2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ et donner la forme trigonométrique de z

Sujet 39: (Bac-Maroc Ses 2014 Rattrapage)

1. Résoudre dans C l'équation (E) : $z^2+i=0$ (On note a la solution ayant la partie réelle positive)
2. a) Calculer le module et un argument de $1+a$ et déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
   b) Vérifier que $(1-a)(1+a)=1+i$ puis déduire la forme trigonométrique de $1-a$
3. Dans le plan complexe rapporté à un R.O.N.D, on considère les points A et B et M et M' et N d'affixes respectifs a et $-a$ et z et z' et $\bar{z}$ avec $zz'+i=0$
   a) Montrer que (OM') et (ON) sont perpendiculaires
   b) a) Montrer que $z'-a=i\dfrac{z-a}{az}$
   c) Montrer que si $z\neq-a$ et $z'\neq-a$ alors $\dfrac{z'-a}{z'+a}=-\dfrac{z-a}{z+a}$
   d) On suppose A et B et M non alignés. Montrer que M' appartient au cercle circonscrit à ABM

Sujet 40:

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(1+iz)^5=(1-iz)^5$

1. Montrer que toute solution de (E) est réelle et déduire que : $\exists!\,\theta\in\left]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. $z=\tan(\theta)$
2. Montrer que (E) est équivalente à $e^{i(10\theta)}=1$ puis résoudre (E)
3. Résoudre (E) en utilisant les racines cinquièmes de l'unité

Sujet 41:

On considère l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z)=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$

1. Résoudre dans C l'équation $f(z)=z$
2. Ecrire f sous forme d'un composé d'une homothétie h et d'une rotation r à déterminer