Produit Scalaire

Br-Rachid *www.sc-math.e-monsite.com*

Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, le plan est rapporté à un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$

Sujet 1:

Soient $\vec{a}(2,-3)$ et $\vec{b}(3,2)$ et $\vec{c}\left(\sqrt{2},-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ et $\vec{d}(-1,1)$

1. a- Calculer la norme de $\vec{d}$ et calculer $\vec{i}.\vec{d}$ et $\vec{d}.\vec{j}$

   b) Déterminer le couple de coordonnées polaires de $\vec{d}$

2. a) Calculer $\vec{a}.\vec{d}$ et $det(\vec{a},\vec{d})$. Déduire $\tan(\vec{a}.\vec{d})$

   b) Calculer les nombres réels λ et μ tels que $\lambda\vec{a}+\mu\vec{c}=0$

3. Calculer $\vec{a}.\vec{c}$ et $det(\vec{a},\vec{c})$. Déduire la mesure principale de l'angle $(\widehat{\vec{a},\vec{c}})$

4. Montrer que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux

5. Calculer un vecteur $\vec{n}(x,y)$ normé et orthogonal à $\vec{d}$

Sujet 2:

Soients $(D): x+y-2=0$ et $A(2,1)$. Soient H et A' respectivement la projection orthogonale de A sur la droite (D) et le symétrique de A par rapport à la droite (D).

1. Calculer $y\in\mathbb{R}$ tel que $B(3,y)\in(D)$

2. Déterminer les coordonnées de H et de A

3. Calculer la surface du triangle BAA'

4. Calculer la valeur minimale de AM lorsque M décrit la droite (D)

Sujet 3:

Soient les droites $(D): y=-x+1$ et $(L): y=x-1$ et $(\Delta):\ x=3$

1. Déterminer les coefficients directeurs de (D) et de (L) puis les représenter dans $(O,\vec{i},\vec{j})$

2. Montrer que $(D) et (L)$ son perpendiculaire et déterminer A , leur point d'intersection

3. la droite (Δ) coupe (D) et (L) aux point C et D respectivement. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ et la surface du triangle ACD

4. a) Soit le point $B(x,0)$ avec $x>1$. Calculer $d(B,(D))$ et $d(B,(L))$

   b) Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des points du plan équidistant à $(D) et (L)$

5. Soit le point $E(4,1)$. Calculer la surface du quadrilatère $ACED$

Sujet 4:

Soient $A(-1,1)$ et $B(0,3)$ et $C(2,0)$

1. a) Déterminer l 'équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$ et celle de $[BC]$

   b) Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC et préciser le rayon

2. a) Déterminer l 'équation cartésienne de deux bissectrices de ABC

   b) Déterminer les coordonnées du centre du cercle inscrit dans ABC et préciser son rayon

Sujet 5:

Soient $A(2,1)$ et $B(-1,1)$ et $C(1,-1)$

1. Déterminer l'équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle (ABC)
2. Déterminer l'équation cartésienne du cercle inscrit dans le triangle (ABC)

Sujet 6:

Soient $A\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(1,\frac{-3}{2}\right)$ et $C(1,\frac{5}{2})$

1. Calculer AB et AC
2. a) Montrer que le triangle (ABC) est rectangle en A (On demande deux méthodes)

   b) Calculer la surface du triangle (ABC) (On demande deux méthodes)
3. Montrer que l'équation cartésienne du cercle (L) circonscrit au triangle (ABC) est donnée par :

   $x^2+y^2-2x-y-\frac{11}{4}=0$. Préciser le centre I et le rayon R de (L)
4. On considère la droite (D) d'équation : $x+2y=0$

   a) Calculer la distance $d(I,(D))$.

   b) Déduire la position de (D) et (L)
5. Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} x^2+y^2-2x-y-\frac{11}{4}\leq 0 \\ x+2y\leq 0 \end{cases}$

Sujet 7:

Soit $E=\{M(x,y)\in(P) \ / \ x^2+y^2-2x+2y+1=0\}$

1. a) Montrer que E est un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

   b) Montrer que les axes du repère sont tangents à (E).
2. a) Vérifier que $A(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}-2}{2})\in(E)$.

   b) Donner l'équation cartésienne de la tangente à (E) passant par A
3. a) Ecrire l'équation cartésienne du cercle (F) de centre $B(1,2)$ et de rayon 2

   b) Prouver que (E) et (F) sont tangents et déterminer leur point de tangence
4. Déterminer graphiquement les solutions du système : $\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y+1\geq 0 \\ x^2+y^2-1\leq 0 \end{cases}$

Sujet 8:

Soit $(E): x^2+y^2-x+y-\frac{3}{2}=0$ et $A(3,0)$

1. Montrer que (E) est un cercle et vérifier que A se trouve en dehors de (E)
2. Trouver les équations cartésiennes des tangentes à (E) passant par A

Sujet 9:

Soit $A(-1,1)$ et $B(2,1)$ et $C(2,5)$. Pour tout M du plan P, on pose : $S=\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})$

1. Donner les coordonnées du point G barycentre de $(B,1)$ et $(C,2)$
2. Montrer que $S=3\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MG}$
3. Déterminer les coordonnées du point I milieu de $[AG]$
4. Calculer S en fonction de d^2 avec $d=d(I,M)$
5. On suppose que M est un point de la droite dont une équation cartésienne est $2x-y=0$
   Déterminer les coordonnées de M pour que S soit minimal

Sujet 10:

Soient A et B deux points distincts du plan. Déterminer l'ensemble des points M dans les cas :

- $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=\pm 2$ avec $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan
- $AM^2-BM^2=2$
- $AM^2+BM^2=2$
- $\frac{AM}{BM}=2$
- $\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\|=\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\|$

Sujet 11:

Soient A et B deux points distincts du plan. Soit $E=\{M\in P \ / \quad AM=2BM \quad (1)\}$

A- Approche géométrique

1. Montrer que $A\notin(E)$ et $B\notin(E)$
2. Déterminer sur $[AB]$ un point C qui soit solution de (1)
3. Déterminer la nature géométrique de (E)

B- Approche analytique

On prend $A(3,0)$ et $B(0,-3)$ et $M(x,y)$

1. Donner l'équation cartésienne de (E). Déduire la nature et les éléments caractéristiques de (E)
2. Soit (D_m) la droite passant par $C(0,m)$ $(m\in IR)$ et dont $\vec{u}(1,-1)$ est un vecteur normal
   a) Ecrire l'équation cartésienne de (D_m)
   b) Discuter suivant m l'intersection de (D_m) et (E)

Sujet 12:

(ABC)un triangle équilatérale de coté $\sqrt{3}$, I le milieu de $[BC]$ et $G=Bary\{(A,-4),(B,1),(C,1)\}$.

1. a) Montrer que G est le symétrique de I par rapport à A.
   b) Calculer GA et GB et GC
2. Soit $(E)=\left\{M\in P \;/\; -4MA^2+MB^2+MC^2=\frac{k}{2} \;\; avec\, k\in IR\right\}$

   a) Montrer que : $M\in E \Longleftrightarrow MG^2=\frac{21-k}{4}$

   b) Discuter suivant les valeurs de k la nature de l'ensemble (E)

Sujet 13:

Soient (S) l'ensemble des points $M(x,y)$ dont les coordonnées vérifient : $x^2-2|x|+y^2<0$

1. Montrer que la droite $D(O,\vec{j})$ est un axe de symétrie de (S)
2. Montrer que le point $O(0,0)$ est un centre de symétrie de (S)
3. Représenter (S) graphiquement

Sujet 14:

Soit C_m l'ensemble des points $M'(x,y)$ tel que $x^2+y^2+mx-my-2m-2=0 \quad (m\in IR)$

1. Etudier suivant les valeurs de m la nature de C_m
2. Déterminer l'ensemble des centres I_m des centres des cercles C_m
3. Montrer que tous les cercles C_m passent par un point fixe à déterminer
4. Montrer que tous les cercles C_m sont tangents à la droite $x-y-2=0$. Préciser le point de tangence
5. Représenter graphiquement les cercles C_0 et C_{-2} et C_2 et C_{-4} et C_{-6}

Sujet 15:

Soit C_m l'ensemble des points $M'(x,y)$ tel que $x^2+y^2-2mx-2(m+1)y+2m^2+2m=0 \quad (m\in IR)$

1- Montrer que C_m est un cercle. Déterminer en fonction de m son rayon R_m et son centre I_m.

2- Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m décrit IR.

3- Déterminer les cercles C_m tangents à la droite d'équation $3x+2y=0$.

4- Montrer que pour tout m, la droite d'équation $y=x$ coupe C_m en deux points

Sujet 16:

Soit le cercle (C) d'équation $x^2+y^2=2$. Soit l'ensemble (C') : $\begin{cases} x=1+3\cos t \\ y=3\sin t \end{cases} \quad ; \quad t\in[0,\pi]$

1. Quelle est la nature de (C'). En faire une représentation graphique
2. Etudier $(C)\cap(C')$

Sujet 17:

Le cercle (ζ) est représenté paramétriquement comme suit $\begin{cases} x=1+\sqrt{2}\cos\theta \\ y=2+\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ $\theta\in\mathbb{R}$

1. Donner les coordonnées cartésiennes des points A et B et C de (ζ) de paramètres respectifs $\frac{-\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}$. Calculer la surface du triangle ABC
2. Donner une équation cartésienne de (ζ)
3. Montrer que $[AB]$ est un diamètre de (ζ)
4. Soit Ω le centre de (ζ) . Soit la droite (D) d'équation cartésienne $y=2-\sqrt{2}$
   a) Calculer $d(\Omega,(D))$ et déduire la position de (ζ) et (D)
   b) Calculer $d(\Omega,(x=0))$ et déterminer $(\zeta)\cap(x=0)$
5. a) Montrer que O est en dehors de (ζ)
   b) Donner les équations cartésiennes des tangentes à (ζ) issues de O